प्र[illegible]न वैदि[illegible]क [illegible]णित

पुष्प—२

मुस्कराता गणित

वैदिक गणित सूत्र :

1. एकाधिकेन पूर्वेण
2. निखिलं नवतश्चरमं दशत:
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्
4. परावर्त्ययोजयेत्
5. शून्यं साम्यसमुच्चये
6. (आनुरूप्ये) शून्यमन्यत्
7. संकलनव्यव कलनाभ्याम्
8. पूरणपूरणाभ्याम्
9. चलनकलनाभ्याम्
10. यावदूनम्
11. व्यष्टिसमष्टि:
12. शेषाण्यङ्केन चरमेण
13. सोपान्तयद्वयमन्त्यम्
14. एकन्यूनेन पूर्वेण
15. गुणितसमुच्चय:
16. गुणकसमुच्चय:

डॉ० नरेन्द्र पुरी

[illegible] वेदात् सर्वं प्रसिद्धयति ।

[illegible]पूर्ण ज्ञान के अनादि अनन्त स्रोत हैं ।

Vedas are the Eternal Source of Knowledge.

दिनांक	सदस्य संख्या	दिनाँक	सदस्य संख्या

दिनांक	सदस्य संख्या	दिनाँक	सदस्य संख्या

165

आ नो भद्राः कृत्वोः यन्तु विश्वतः

"प्राचीन वैदिक गणित"

'सोलह वैदिक सूत्रों से गणितीय समस्याओं के अद्वितीय सरल हल'



पुष्प-2

डा० नरेन्द्र पुरी

बी. ई. (सिविल), एम. ई. (स्ट्रक), पी. एच. डी.,
एम. आई. जी. एस., एम. आई. ए. क्यू. आर.,
एफ. आई. एस. डी. टी., एम. आई. एस. टी. ई.
एम. आई. एस. एच. एम.

रीडर जानपद अभियान्त्रिकी विभाग
रुड़की विश्वविद्यालय, रुड़की

प्रकाशक :

आध्यात्मिक विज्ञान श्रृंखला
SPIRITUAL SCIENCE SERIES
रुड़की

पुष्प–1. अंग्रेजी—प्रथम संस्करण गुरु पूर्णिमा जुलाई 1986
द्वितीय संस्करण गुरु पूर्णिमा जुलाई 1988
हिन्दी—प्रथम संस्करण स्वतन्त्रता दिवस अगस्त 1986
द्वितीय संस्करण गुरु पूर्णिमा जुलाई 1988

पुष्प–2. अंग्रेजी—राष्ट्रीय नवयुवक दिवस
स्वामी विवेकानन्द का 125वाँ जन्म दिवस 12 जनवरी 1988
हिन्दी—राष्ट्रीय नवयुवक दिवस
स्वामी विवेकानन्द का 126वाँ जन्म दिवस 12 जनवरी 1989

पुष्प–3. अंग्रेजी—राष्ट्रीय नवयुवक दिवस
स्वामी विवेकानन्द का 126वाँ जन्म दिवस 12 जनवरी 1989

झलकियां : अंग्रेजी प्रथम संस्करण नवम्बर, 85
द्वितीय संस्करण महाकुम्भ अप्रैल, 86
हिन्दी महाकुम्भ अप्रैल, 86

● प्रकाशक :
श्रीमती मीनाक्षी पुरी
आध्यात्मिक विज्ञान श्रृंखला
41/2 आमोद कुँज, रुड़की विश्वविद्यालय
रुड़की 247667 (यू० पी०)

● मुद्रक :
प्रीति प्रिन्टर्स
तीरगरान, मेरठ शहर ।





प्रातः प्रभति सायन्तम्
सायन्तः प्रातरन्तम्
यत् करोमि जगन्नाथ
तदस्तु तव पूजनम् ।

सुबह से शाम तक, शाम से सुबह तक;
मैं जो कुछ भी करता हूँ,
हे जगन्नाथ सब तेरी ही पूजा,
तेरी ही उपासना हो जाए ।

वैदिक गणित को पुनः विकसित करने वाले पूज्य
जगदगुरु शंकराचार्य
स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी
के चरण कमलों में सादर समर्पित

वैदिक गणित हमें सरल, मौखिक और अत्यधिक गतिशील कार्य प्रणाली देता है। जिसमें द्रुत गति वाली जांच विधि भी उपलब्ध है। वैदिक गणित आज के प्रतियोगिताओं के युग में एक प्राचीन वरदान है। वैदिक विधियाँ विविधता, गति और समझने में सरल होने के कारण छात्र के अन्तःकरण को प्रफुल्लित करके उसे प्रसन्नचित्त करती है। वैदिक गणित की अत्यधिक सरल विधियों को सीखते हुये बच्चे स्वतः ही मुस्कराने लगते है। वैदिक गणित में हर वर्ग (गुणा, भाग आदि) के प्रश्नों के लिए एक साधारण विधि है जो प्रचलित विधि से अधिक सरल एवं गतिशील है। इसके अतिरिक्त वैदिक गणित में प्रत्येक वर्ग के लिये विशेष विविध विधियाँ भी उपलब्ध है जो आश्चर्यजनक गति से कार्य करती है। वैदिक गणित की कक्षा में साधारणतया विद्यार्थी बहुत बार अध्यापक से भी आगे निकल जाते है। व श्यामपटल पर प्रश्न लिखते ही उत्तर बोलने लगते है।

आधुनिक युग में

वैदिक गणित के संचालक

आधुनिक युग में वैदिक गणित को पुनः विकसित करके प्रथम "वैदिक गणित" पुस्तक के रचयिता स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी गोवर्धन पीठ के शंकराचार्य थे। जगद्गुरु जी बचपन में वेंकटरमण के नाम से जाने जाते थे। वह तीव्र कुशाग्र बुद्धि के विद्यार्थी थे एवं उन्होंने अपनी शिक्षा काल में प्रत्येक विषय में प्रथम स्थान प्राप्त किया था।

स्नातक परीक्षा में उच्चतम स्थान प्राप्त करने के पश्चात् श्री वेंकटरमण सरस्वती 1903 में 'अमेरिकन कालेज ऑफ साइन्सिस, न्यूयार्क के बम्बई केन्द्र से स्नात्तकोत्तर परीक्षा में बैठे एवं 1904 में केवल 20 वर्ष की अल्पायु में एक साथ सात विषयों में परीक्षा देकर सभी विषयों में उच्चतर स्थान प्राप्त किया। उन्होंने अद्वितीय शैक्षिक योग्यता का अद्भुत विश्व रिकार्ड कायम किया। उनके विषय संस्कृत, दर्शन शास्त्र, अंग्रेजी, गणित, इतिहास एवं विज्ञान आदि थे।

स्वामी जी के शब्दों में,

"यह सूत्र गणित की हर शाखा के हर पहलू में कार्यान्वित व प्रयोग हों सकते है (अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति-समतलीय एवं ठोस, त्रिकोणमिति-समतलीय एवं गोलीय, खगोल विद्या चलन-कलन आदि-आदि) वास्तविकता में गणित का कोई भी पहलू इन सूत्रों की परिधि से बाहर नहीं है। यह सूत्र सरलता से समझे, याद किए और प्रयोग किए जा सकते है। वास्तविकता में तो यह सारा कार्य मात्र मानसिक स्तर पर ही सम्पन्न हो जाता है।

लन्दन के प्रोफेसर कैनिथ विलियम्स के शब्दों में, "वैदिक पद्धति में विविध कार्य प्रणाली की उपस्थिनि, जो नवीन दिशाओं में अन्वेषण करने के लिए प्रेरित करती है, व पूर्णतया मानसिक व मौखिक होने के कारण गणित के पठन-पाठन में एक नवीन व अद्वितीय पहलू जोड़ती है। विविधता व सरलता, प्रसन्नता ब आनन्द देती है। मानसिक कार्यप्रणाली एवं प्रखर बुद्धि का विकास करती है जो स्वतः ही नवीन दिशाओं में शोध के लिए प्रेरित करती हे।

प्रस्तावना

वेद समस्त ज्ञान के स्रोत हैं। वे न केवल प्राचीनतम, अपितु सर्वश्रेष्ठ भी हैं। वेद ज्ञान व विज्ञान का अथाह सागर व प्रेरणा स्रोत होने के फलस्वरूप सच्चे जिज्ञासु के लिए नवीनतम भी है। वेदों से प्रेरणा पाकर लाखों लोगों ने ज्ञान के पथ का अनुसरण किया है। समय के साथ-साथ दृश्य जगत में, वैदिक ज्ञान का विशाल भण्डार नष्ट व छिन्न-भिन्न हो चुका हूँ, अथवा लुप्त हो चुका हैं। वैदिक गणित भी इसका अपवाद नहीं हैं। यह प्रेरणादायक तथ्य है कि पुनः वैदिक ज्ञान व विज्ञान की ओर विश्व के वैज्ञानिकों की रूचि जागृत हुई हैं। आज के जाने माने वैज्ञानिक वेद में निहित अमूल्य रत्नों को खोजने के लिये लालायित है। हाल ही में भौतिकी विज्ञान को Theary of Relativity—रेलेटिविटी नियम; देने वाले वैज्ञानिक आइंसटिन जो स्वयं संस्कृत के भी विद्वान थे ने बताया कि उनका शोध का मूल प्रेरणा स्रोत श्री मद्भगवत् गीता व वैदिक शास्त्र ही थे। रोबोटस के द्वारा उपयोग किए जाने वाले कृत्रिम मस्तिष्क (Artificial Intellegence) के विद्वान नासा के जाने माने वैज्ञानिक डा० आर० ब्रिगस इस निष्कर्ष पर पहुँचे है। कि इस विषय में भविष्य के शोध के लिये सबसे उत्तम कम्प्यूटर की भाषा सस्कृत ही होगी।

ज्ञान की अनेकाविध शाखाओं के ज्ञाता, मानव इतिहास में गिने चुने ही हुये हैं। श्री मत् भारती कृष्ण तीर्थ जी भी उन अमूल्य रत्नों में से एक हैं। वेदों पर लिखे गये पश्चिमी भाष्य में एक टिप्पणी "वेदों में एक त्रुटि" ने इनके हृदव को उद्वेलित कर दिया। दृश्य जगत में वैदिक गणित के कोई गुरू न मिलने से भी स्वामी जी विचलित नहीं हुये। वेद से प्रेरणा पाकर स्वामी जी ने युगीय पुरातन भारतीय साधन, योग एवं ध्यान के द्वारा वैदिक गणित को पुनः विकसित कर उसे प्रयोगिक रूप प्रदान किया। उन्होंने 16 संस्करण लिखे, परन्तु केवल एक पुनर्लिखित परिचयात्मक संस्करण ही ज्ञान के सच्चे शोधकर्ता की प्रेरणा एवं पद-प्रदर्शन के लिये उपलब्ध है। मैं उनके पावन चरण कमलों में शतशः प्रणाम करता हूँ।

विश्व के हर कोने में हर व्यक्ति जो वैदिक गणित का थोड़ा सा भी ज्ञान प्राप्त करता है उसका इस विषय को और अधिक जानने का उत्साह उत्तरोत्तर बढ़ता जाता है। छात्रों की रुचि एवं उनकी अनुक्रियाओं ने ही हमें इस अर्जित ज्ञान को क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करने को उत्साहित किया।

वैदिक गणितीय पद्धति की स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के नियमित अभ्यास से मानवीय मस्तिष्क का सर्वांगीण विकास स्वतः ही होने लगता है। अन्तर्ज्ञान की क्षमता विकसित होने से नन्हें विद्यार्थियों के मस्तिष्क पटल पर स्वतः ही प्रश्नों के उत्तर उभर आते है। वैदिक गणित पद्धति अपनी सार्वभौमिक विशेषताओं के कारण गणित जैसे शुष्क विषय को तनावरहित व आनन्ददायी बनाती है। जिसे विद्यार्थी मुस्कराते हुये सीखते है। वैदिक गणित, गणित जैसे बोझिले विषय को रुचिकर व आनन्ददायी विषय में परिवर्तित करने में सक्षम है। साधनामय सात्विक जीवन व्यतीत करने वाले तो वैदिक गणित को सीखते व करते हुये ध्यान में प्राप्त दिव्यानन्द का अनुभव करते हैं। इस प्रकार विश्व भर में गणित की शिक्षा में "गणितीय आकुलता" की समस्या के समाधान हेतु वैदिक गणित पद्धति एक अमूल्य वैदिक वरदान हैं।

प्राचीन वैदिक गणित की यह एक विशेषता है, कि जैसे ही आप इस पद्धति का प्रयोग करेंगे, नयी-नयी कड़ियाँ स्वयं ही आपके मस्तिष्क में आने लगेंगी। भारत भूमि के दूर दराज प्रदेशों में रहने वाले व्यक्तियों, विशेषतः छात्रों ने नई कड़ियों को एकत्रित करने में मेरा योगदान दिया। (इस पुस्तक में अध्याय 1, 2, 3, 6, 11, 12 व 14 मूल पुस्तक के अतिरिक्त जोड़े गये हैं।)

हम पूर्व प्रतिपादित कड़ियों को एक क्रमबद्ध 'पुष्प माला' के रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं, जो कि छात्रों व अध्यापकों द्वारा सरलता से समझी एवं प्रयोग की जा सकें। यह हर्ष का विषय है कि इस ज्ञान को विश्व के हर कोने में उपलब्ध कराने हेतु महर्षि महेश योगी के अनुयायी इस पुष्प माला का अनुवाद दर्जनों विदेशी भाषाओं में कर रहे है। कहीं-कहीं पर लेखन कार्य सरल विषय पर भी बहुत लम्बा हो गया है। लेकिन एक बार पढ़ने एवं अभ्यास करने से मूल क्रियाओं को अत्यन्त द्रुत गति से किया जा सकेगा। मुक्त आलोचनाओं का हम सहर्ष स्वागत करते हैं क्योंकि यह भविष्य के प्रकाशनों में सहयोगी सिद्ध होगी। यह समस्त कार्य एक 'ज्ञान यज्ञ' के भाव से किया जा रहा है। मैं, हमारे सभी निस्वार्थ सहयोगियों को उनके इस देश एवं संस्कृति प्रेम से ओत-प्रोत कार्य के लिये धन्यवाद करता हूँ। मैं विशेष रूप से कु० प्रगति गोयल एवं श्री बोध स्वरूप पाण्डयाल (नेपाल) का आभारी हूँ।

इस हिन्दी रूपान्तर में कु० प्रगति गोयल एवं श्री विकास गर्ग के अनुवाद कार्य में योगदान के लिये विशेष आभारी हूँ।

ईश्वर से प्रार्थना है कि यह वैदिक गणित का उपहार आनन्ददायी हो और आपके अन्तर्ज्ञान प्राप्त करने की क्षमता का विकास करे।

—लेखक

विषय-सूची

प्राचीन वैदिक गणित

उल्लेखनीय तथ्य

एक सम्पूर्ण पद्धति

- ☐ मानवीय मस्तिष्क को सर्वांगीण विकास में सक्षम पद्धति ।
- ☐ 120 शब्दों वाले वैदिक सूत्र गणित के सभी प्रश्न हल कर सकते हैं ।
- ☐ दृढ़ वैज्ञानिक दृष्टिकोण ।
- ☐ अध्ययन के दृष्टिकोण में क्रान्ति ।
- ☐ शोध एवं विकास के लिए नवीन दृष्टिकोण ।
- ☐ वैदिक गणित से कम्प्यूटर परिणामों की जांच सम्भव व गणक को भी मात करने वाली ।
- ☐ अंकों के विशिष्ट, अज्ञात एवं गुप्त गुणों का ज्ञान ।
- ☐ साधारण, लघु एवं गणित की जादुई गति वाली प्रणाली ।
- ☐ विशेष पूर्व पाठ्यक्रम अनावश्यक ।
- ☐ बच्चों के लिए भार नहीं बल्कि-गणित भी मनोरंजक विषय ।
- ☐ सभी प्रतियोगिताओं के लिए वरदान जैसे केन्द्रीय एवं अर्थशास्त्र विज्ञान, यू० पी० एस० सी०, बैंक, इन्जिनियरिंग, ओ एन० जी० सी०, मेडिकल आदि जहाँ गणक का प्रयोग वर्जित होता है ।
- ☐ विशेष सन्दर्भ में आधुनिक कम्प्यूटर की अपेक्षा अधिक उपयोगी एवं सही
- ☐ गणित के विभिन्न पहलुओं को प्रचलित पद्धति की तुलना में वैदिक पद्धति द्वारा एक चौथाई से भी कम समय में सीख सकते हैं ।

वैदिक गणित समाचार

"उन्हें (प्राचीन भारतीयों को) कम्पयूटर वैज्ञानिक मान लेना बहुत मोहक प्रतीत होता है। हमें यह नहीं भूलना चाहिए कि शून्य एवं द्विअंकीय (Binary System) आदि महत्वपूर्ण आविष्कार भी भारतीय विचारकों ने पश्चिम से हजार वर्ष पहले ही कर लिये थे।" डॉ० आरब्रिग्स (NASA)

(कैलिफोर्निया आर्टिफिशियल इन्टेलिजेनस (यन्त्र मानव) की शोध पत्रिका 1985 से अनुदित)।

1. वैदिक गणित पर प्रथम पुस्तक अंग्रेजी में शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज ने लिखी थी। पिछले 20 सालों से इस पुस्तक के 11 संस्करण छप चुके हैं। इस पुस्तक को मराठी के चार भागों तथा गुजराती भी प्रकाशित किया जा चुका है। पुनः इसका हिन्दी, लैटिन तथा जर्मनी भाषाओं में भी अनुवाद किया जा रहा है।

2. वैदिक गणित पर गोष्ठी और कार्यशाला नागपुर, लन्दन और रुड़की में 1985, 1986 और 1987 में आयोजित हो चुकी है। 1988 में वैदिक गणित की गोष्ठियाँ व कार्यशालाएं रोहतक, पंतनगर, जयपुर, अहमदाबाद, देहली व विदेशों में इंग्लैंड, अमेरिका, मैक्सिको, नार्वे, स्वीडन, डेनमार्क, हंगरी, इटली, स्पेन, फ्रांस, जर्मनी, स्विटजरलैंड और हालैंड में आयोजित की गई।

3. मानव संसाधन विकास मंत्रालय और इसकी राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान द्वारा आयोजित कार्यशाला की प्रतिक्रिया स्वरुप एक राष्ट्रीय कार्यकारी समिति का गठन किया गया है, जो वैदिक गणित के शोध एवं विकास की दिशा में कार्यरत है। इसी के अन्तर्गत मार्च 1988 में जयपुर तथा अक्टूबर 1988 में अहमदाबाद में दो कार्यशालाओं का आयोजन किया गया है।

4. वैदिक गणित को स्कूल ऑफ इकानामिक्स साइन्स, सेन्ट जेम्स स्कूल, लंदन, महर्षि अन्तर्राष्ट्रीय विश्वविद्यालय व महर्षि के वाशिंगटन, आयोवा, हालैंड आदि में स्थित स्कूलों में पढ़ाया जा रहा है।

5. स्वामी जी की पुस्तक अंक गणितीय संगणनाओं, संख्या पद्धति, मिश्रित गुणन, बीज गणितीय क्रियाओं, गुणन खण्ड सरल द्विघातीय समीकरण, आंशिक भिन्न, कलावकलन वर्ग एवं घन—क्रियाओं वर्गमूल, घनमूल निर्देशांक ज्यामिति एवं अद्वितीय वैदिक गणित संकेताक्षरों के विलक्षण अनुप्रयोगों से अवगत कराती है।

6. लन्दन में एक विशेष पाठ्यक्रम के द्वारा यह प्रदर्शित किया गया है कि वैदिक गणित प्रणाली गणित के उच्च स्तरीय पाठ्यक्रम (जी० सी० ई० ए—स्तर) के अनुरूप प्रयोग की जा सकती है। इन पाठ्यक्रमों की योजना "मेरी वार्ड सेन्टर" में पोलेटेक्नीक ऑफ नार्थ लन्दन के सहयोग से चलाई गई थी। जो हमारी (10+2) पद्धति के समकक्ष है।

7. इस विलक्षण भारतीय प्रणाली पर रुड़की विश्वविद्यालय, अमेरिका व इंग्लैंड में अनुसन्धानात्मक कार्य भी किया जा रहा है। इस शोध में वैदिक गणित के बीजगणित, त्रिकोणमिति, त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति-समतलीय एवं गोलीय त्रिभुजों के हल, रैखिक एवं बहु रैखिक अवकल समीकरण, सारणिक एवं लघु गणकीय चरघांताकी समीकरणों के हल में वैदिक सूत्रों के प्रयोगों का समावेश है।

8. सबसे उल्लेखनीय तथ्य यह है कि वैदिक गणित अनेक समीकरणों के अद्वितीय हल देता है, जिन्हें आधुनिक गणित में शेषफल प्रमेय विधि के प्रयोग के द्वारा ही हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिये "केपलर समीकरण" के लिये सुलभ शेष फल जैसी क्लिष्ट विधि की तुलना में वैदिक गणित पद्धति से केवल 90 सैंकिड में ही हल किया जा सकता है।

इसके अतिरिक्त वैदिक गणित को त्रिभुजांक पद्धति का प्रयोग करने से त्रिकोणमिति व निर्देशांक ज्यामिति के कार्य में अत्यधिक सरलता व गति आ जाती है। इन प्रश्नों को करने के लिये प्रचलित पद्धति में प्रयोग किए जाने वाले ढेरों फार्मूलों के प्रयोग की कोई आवश्यकता नहीं पड़ती है।

9. वैदिक गणित पर डाक्टरेट का शोध कार्य श्री एस० के० कपूर द्वारा लिखा गया है।

वैदिक गणित पुस्तकों की सूची

1. वैदिक गणित शंकराचार्य भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज (अंग्रेजी)
2. वैदिक गणित दिलीप कुलकर्णी (मराठी अनुवाद) भाग 4
3. वैदिक गणित डॉ० एन० एम० कनसारा (गुजराती अनुवाद)
4. प्राचीन वैदिक गणित—पुष्प–1 डॉ० नरेन्द्र पुरी (अंग्रजी व हिन्दी)
5. प्राचीन वैदिक गणित—पुष्प 2 डॉ० नरेन्द्र पुरी (अंग्रेजी व हिन्दी)
6. प्राचीन वैदिक गणित—पुष्प 3 डॉ० नरेन्द्रपुरी (अंग्रेजी)
7. झलकियां वैदिक गणित डॉ० नरेन्द्र पुरी (अंग्रेजी व हिन्दी)
8. उच्चस्तरीय वैदिक गणित कार्यशाला रुड़की 1987 डॉ० नरेन्द्र पुरी (अंग्रेजी)
9. वैदिक गणित कार्यशाला–बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय 1987 डॉ० नरेन्द्र पुरी (अंग्रेजी)
10. वैदिक गणित का ओवरवियू-अन्तर्राष्ट्रीय गोष्ठियां डॉ० नरेन्द्रपुरी (अंग्रेजी)
11. वैदिक गणित के अन्तर्राष्ट्रीय प्रारम्भिक पाठ्यक्रम के व्याख्यान डॉ० नरेन्द्र पुरी (अंग्रेजी)
12. वैदिक गणित के उच्चस्तरीय उपयोग (अंग्रेजी) डॉ० नरेन्द्र पुरी
13. इन्ट्रोडक्ट्री लैक्चर्स आन वैदिक मैथमैटिक्स ए० पी० निकोलस, जे० आर० पिकल्स एवं के० विलियम्स (अंग्रेजी)
14. डिसकवर वैदिक मैथमैटिक्स के० विलियम्स (अंग्रेजी)
15. ट्रिपल्स के० विलियम्स (शोध पुस्तक अंग्रेजी)
16. वरटीकली एण्ड क्रास वाइस, के० विलियम्स एवं जे० आर० पिकल्स (अंग्रेजी)

टिप्पणी : सभी पुस्तकें आss से उपलब्ध है। पूर्ण विवरण के लिए रु० 2/— के डाक टिकट भेजें।

रुड़की में सम्पन्न कार्य

रुड़की विश्वविद्यालय में वैदिक गणित व इसके विभिन्न तकनीकी उपयोग व कम्प्यूटर में उपयोगों में शोध कार्य के लिए एक उच्चस्तरीय समिति का गठन किया गया है। इस समिति में गणित विभाग, सिविल अभियांत्रिकी विभाग, भूकम्प अभियांत्रिकी विभाग, यांत्रिकी विभाग, जल विज्ञान विभाग व इलैक्ट्रानिक्स और कम्प्यूटर अभियांत्रिकी विभाग आदि के अध्यापकगण व शोध कर्त्ता सदस्य है। इसके अतिरिक्त रुड़की विश्वविद्यालय के अध्यापकों एवं छात्रों द्वारा निर्मित "आध्यात्मिक अध्ययन संस्था" हमारे इस अमूल्य, विस्तृत वैज्ञानिक एवं सांस्कृतिक परम्परा के अद्वितीय गणितीय विषय के प्रचार एवं प्रसार के लिए विनम्र प्रयास कर रही है।

चित्र ध्वनि:—वैदिक गणित के विभिन्न पहलूओं पर व्याख्यानों के वीडियो कैसेटस की शृंखला विश्व के विभिन्न देशों में बनाई जा रही है। वैदिक गणित के कैसेट विक्रय के लिये उपलब्ध है। इच्छुक व्यक्ति रु० 5/— भेजकर विस्तृत जानकारी प्राप्त कर सकते है।

व्याख्यान—वैदिक गणित पर हजारों व्याख्यानों की शृंखलाएँ विश्व की विभिन्न शिक्षा संस्थानों में आयोजित की जा रही है। भारत में दिल्ली, पंजाब, हरियाणा, राजस्थान, गुजरात, उत्तर प्रदेश, पश्चिमी बंगाल, मध्य प्रदेश, केरल, कर्नाटक, गोआ और महाराष्ट्र के विभिन्न स्कूलों, कालेजों तथा विश्वविद्यालयों में आयोजित हो चुके है। इसके अतिरिक्त लेखक द्वारा वैदिक गणित पर व्याख्यान व गोष्ठियां अमेरिका, इंग्लैंड, कनाडा, मैक्सिको, नार्वे, स्वीडन, फिनलैंड, डेनमार्क, हंगरी, जर्मनी, इटली, स्विटजरलैंड, स्पेन व हालैंड के विभिन्न शहरों में आयोजित की जा चुकी ।

पाठ्यक्रम—अनेकों बार की गई माँगों के प्रच्युत्तर में आऽस ने मई 1985 से जनवरी 1989 तक वैदिक गणित पर 44 सत्र चलाये है, जिसमें लगभग 4400 से अधिक विद्यार्थीं, अध्यापक, विश्वविद्यालय के छात्र, शोध कर्त्ता, क्षेत्रीय इन्जिनियर और विश्वविद्यालय के प्रोफेसर सभी ने उत्साह पूर्वक भाग लिया है। इन पाठ्यक्रमों मे भारत के अतिरिक्त अमेरिका, कनाड़ा, मैक्सिको, पैनम, हालैंड, फ्राँस, इंग्लैंड, जर्मनी, स्विटजरलैंड और स्पेन के नागरिकों ने भी भाग लिया।

वैदिक विज्ञान संस्थान—पत्राचार पाठ्यक्रम रुड़की से बाहर के पाठकों की अनेकों बार की गई माँगों के प्रत्युत्तर में इस मुस्कराते वैदिक गणित की गृह शिक्षा के लिये अन्तर्राष्ट्रीय पत्राचार पाठ्यक्रम का शुभारंभ वैशाखी एवं महाकुम्भ (अप्रैल 14, 1986) से किया गया। भारतीय सांस्कृतिक परम्परा के इस अद्वितीय विषय की जानकारी के लिये आsस ने रुडकी में वैदिक विज्ञान संस्थान शुरू किया है। प्रारम्भ में संस्थान 6 माह का पत्राचार पाठ्यक्रम आयोजित कर रही है जो अंग्रेजी एवं हिन्दी दोनों भाषाओं में है। हर वर्ष वैशाखी (अप्रैल) व दशहरा (अक्टूबर) से दो नए सत्र आरम्भ होते हैं।

आठवीं कक्षा का विद्यार्थी व उससे बड़ा कोई भी व्यक्ति पत्राचार पाठ्यक्रम में प्रवेश ले सकता है। पाठ्यक्रम के अन्तर्गत प्रत्येक छात्र को छह भागों के पाक्षिक पाठ भेजे जाते हैं। इन पाठों में ढेरों हल किये उदाहरण है। हल करने के लिये अभ्यास प्रश्न भेजे जाते है। छात्रों के द्वारा भेजे गये हलों को जांच करके लौटाया जाता है। पाठ्यक्रम के अन्त में डाक द्वारा परीक्षा का भी प्रबन्ध है। वैदिक गणित पत्राचार पाठ्यक्रम के प्रमाण पत्र भी दिये जाते है। विस्तृत जानकारी, विषय सूची एवं वैदिक गणित की झलकियाँ आदि का शुल्क रु० 10/— है। (रजिस्टर्ड डाक के लिए रु० 7/— अतिरिक्त जोड़कर कुल रु० 10 + 7 = 17 रु० भेजे)।

प्राचीन वैदिक गणित पुष्प माला

भारतीय सांस्कृतिक परम्परा के इस अद्वितीय विषय की विस्तृत जानकारी के लिये "आध्यात्मिक अध्ययन संस्था" ने वैदिक गणित पुस्तकों की पुष्प माला प्रकाशित करने की योजना बनाई है। आsस अत्यन्त विनम्रता से इस पुष्प माला के पुष्प—1 व पुष्प—2 हिन्दी व अंग्रेजी दोनों भाषाओं में प्रकाशित कर चुकी है। व पुष्प—3 अंग्रेजी में जनवरी 1989 में प्रकाशित हो रहा है। आगामी पुष्प निकट भविष्य में प्रकाशित किए जायेंगे।

विषय सूची : प्राचीन वैदिक गणित

"आsस" के सदस्यों के विनम्र प्रयास के फलस्वरूप वैदिक गणित की कुछ खोयी कड़ियों को फिर से जोड़ने का प्रयास सफलतापूर्वक किया गया है। विशेषत: योग एवं घटा करने की तीव्र वैदिक प्रणाली, पहाड़े मिश्रित जोड़ एवं घटा, मिश्रित गुणा, गुणा की आधार प्रणाली का विस्तार, तीन या तीन से अधिक अंकों की गुणा, एक पंक्ति में, बड़े अंकों के वर्ग निकालना, बीजगणित एवं अकगणित की जमा, घटा गुणा, गुणन खण्ड व भाग को जाँचने की वैदिक प्रणाली को पुन: विकसित किया जा चुका है। इनमें से कुछ विषयों की जानकारी गुणा, भाग, आदि विषय पुष्प 1, 2 व 3 में प्रकाशित हो चुके हैं। पुन: और कड़िया अगले पुष्पों में प्रकाशित की जाएगी।

प्राचीन वैदिक गणित

"वैदिक गणित के पाठ्यक्रम में भाग लेने वालों के विचार"

वैदिक गणित के द्वारा किसी भी गणितीय समस्या का समाधान, बहुत कम समय में, लगभग जादुई गति से किया जा सकता है। वैदिक सूत्रों से होने वाली गणनायें, पाठक को आश्चर्यजनक उत्साह से भर देती हैं।

आऽस द्वारा चलाये गए पाठ्यक्रमों में हजारों लोग भाग ले चुके हैं। प्रत्येक कोर्स के अन्त में लोगों की राय जानने के लिये "अनुक्रिया फार्म भरवाया गया जिसमें वैदिक व प्रचलित गणित की तुलना के ऊपर ग्यारह प्रश्न थे। वैदिक गणित का समर्थन करने वाले प्रत्येक प्रश्न के पक्ष में पाठकों की कम से कम 85% राय थी। अधिकतर प्रश्नों ने शत-प्रतिशत समर्थन प्राप्त किया।

पाठकों की प्रतिक्रिया की एक झलक

—प्रत्येक प्रतियोगात्मक परीक्षा के लिए वरदान।

—अत्यन्त रोचक। हमारी कल्पना से परे।

—विश्वविद्यालय के प्रांगण में इसका आयोजन अत्यन्त सुखद है।

—हमारे पूर्वज गणित में भी इतने उन्नत थे।

—यदि वैदिक गणित हमें आरम्भ से पढ़ाया जाता तो कम्प्यूटर भारत में बनते, विदेशों में नहीं।

—शानदार।

—मैं गहराई से इसका अध्ययन करना चाहता हूँ।

—यह भारत और उसकी महान् संस्कृति के प्रति हमारी श्रद्धा और अधिक बढ़ाता है।

—मैं संस्कृत सीखना चाहता हूँ, जिससे कि मैं प्राचीन भारतीय विज्ञान के बारे में जान सकूं।

—विश्व के प्रत्येक व्यक्ति को 'वैदिक गणित' का ज्ञान होना चाहिए।

—दशहरे की छुट्टियों में वैदिक गणित को सीखना एक वरदान रहा।

—मैं वैदिक गणित से गुणनखण्ड आदि कठिन विषयों को भी सीखना चाहता हूँ।

—आश्चर्यजनक गति, विस्तृत अनुप्रयोग तथा गणित की प्रत्येक क्रिया को संजोये हुये।

—इसके प्रयोग से शिक्षा के क्षेत्र में क्रान्ति सम्भव है।

—छोटे-छोटे बच्चों के लिए अनिवार्य रूप से पढ़ाया जाना चाहिये।

—अंकों की रहस्यमय प्रकृति की जानकारी देता है। थोड़े से अभ्यास के बाद वैदिक गणित से मानसिक गणना सम्भव।

—अत्यन्त शिक्षाप्रद, आने वाली पीढ़ी को प्रारम्भ से ही इसका अभ्यास कराया जाना चाहिये।

—वैदिक गणित 'प्राचीन भारतीय संस्कृति' की महान देन।

—वैदिक गणित का अध्ययन काल मेरे जीवन का सबसे अधिक रोचक व आनन्ददायी रहा। गणित की अध्यापिका होने के नाते मेरी गणित में स्वाभाविक रूचि है। परन्तु वैदिक गणित ने मुझे मंत्र मुग्ध कर दिया। वैदिक गणित को सीखने से मुझे अद्वितीय आनन्द की प्राप्ति हुई जिसे व्यक्त करने के लिए मेरे पास शब्द नहीं हैं।

आदर्श बाल निकेतन की एक अध्यापिका

—प्रत्येक वक्तव्य नए-नए पहलुओं को उजागर करता है व वैदिक गणित प्राचीन गणित के ज्ञान की स्पष्ट झलक प्रस्तुत करता है।

विश्वविद्यालय के प्राध्यापक

—मैंने वैदिक गणित के हर पहलु को सीखते हुए आनन्द पाया। यह दो सप्ताह सुन्दर व दिव्यानन्द से परिपूर्ण थे।

आयोवा अमेरिका की लेही

—अत्यन्त आनन्ददायी पाठ्यक्रम—इसके आगे के प्रयोगों को सीखने के लिए लालायित हूँ।

स्वीडन के आल्वसन

—वैदिक गणित का अभ्यास करते हुए मुझे उसी आनन्द की अनुभूति होती है जिसका अनुभव मैं ध्यान के समय करता हूँ।

जर्मनी के निडलर



* प्रार्थना *

ॐ तेजोऽसि तेजोमयि देहि
वीर्यमसि वीर्यमयि देहि
ओजोमसि ओजोमयि देहि
बलमसि बलमयि देहि
अविराविमयी ।
हे तेज के पुंज हमें तेज दो ।
हे वीर्य के पुंज हमें वीर्यवान बनाओ ।
हे ओजस्व स्वरूप हमें ओजस्व दो ।
हे बल के पुन्ज हमें बल प्रदान करो ।
हमें अपने स्वरूप की ओर अग्रसर करें ।

ॐ सहनाववतु सहनौ भुनक्तु सह वीर्यं करवावहै ।
तेजस्विनावधीतमस्तु मा विद्विषावहै ॥
ॐ शान्तिः शान्तिः शान्तिः ।

हे परमात्मा हम दोनों की रक्षा करो । हम दोनों का पालन करो । हम दोनों साथ में रहकर तेजस्वी दैवी कार्य करें । हम दोनों का किया हुआ अध्ययन तेजस्वी दैवी हो और हम दोनों परस्पर एक दूसरे से द्वेष न करें ।

अध्याय-1

विनकुलम् क्रियाऐं

1·1 परिचय :

पुष्प 1 में हमने निखिलम् सूत्र के प्रयोग देखे। उनमें से एक है किसी भी संख्या के पहाड़े लिखने के लिये उसके प्रत्येक अंक को 5 अथवा 5 से कम के अंकों में परिवर्तित करना। यह वैदिक गणित की एक अनोखी विशेषता है। इसके उपयोग से गणनायें करना पहले से बहुत अधिक सरल हो जाता है। 'विनकुलम्' का यह अनोखा सिद्धान्त अत्यन्त रूचिकर एवं उपयोगी है।

प्रायः हम वैदिक गणित के इस सिद्धान्त से अनभिज्ञ हैं। अतः 'विनकुलम्' को योग, ऋण, गुणा, भाग एवं वर्ग करने में प्रयोग करने से पहले हमें इससे पूर्णतया अवगत होना होगा। साधारणतया इसके सिद्धान्त से हमें 5 व उससे छोटे अंकों को ही उपयोग (देखें पुष्प 1 अध्याय 13) करना होगा।

1·1·1 सिद्धान्त :

इसमें 5 से अधिक के अंक के स्थान पर उसका पूरक (10 में से घटाकर) ऋण चिन्ह के साथ लिखा जा सकता है और इस अंक के बायीं ओर वाले अंक में 1 जोड़ दिया जाता है।

1·1·2 उदाहरण 1 : $79 = 80 - 1 = 8\bar{1}$

आगे $80 = 100 - 20 = 1\bar{2}0$

अतः $79 = 8\bar{1} = 1\bar{2}\bar{1}$

79 को $8\bar{1}$ भी लिखा जा सकता है लेकिन दहाई का अंक अभी भी 5 से बड़ा है तो हम इसका पूरक $(10 - 8 = 2)$ और पिछले अंक को 1 बढ़ा देते हैं $0 + 1 = 1$। अतः 79 को $1\bar{2}\bar{1}$ लिखा जा सकता है।

एक विशेष बात यह है कि यदि ऐसे कुछ अंक जो संयुक्त रूप से 5 से अधिक है तो इनका संयुक्त पूरक सीधे ही निखिलम् सूत्र से लिखा जा सकता है और इन संयुक्त अंकों से पहले अंक में 1 जोड़ दिया जाता है। इस उदाहरण में $9 - 7 = 2$, $10 - 9 = 1$ अतः पूरक 21 तथा बायीं ओर का अंक $0 + 1 = 1$ है।

$79 = 1\bar{2}\bar{1}$

1·1·3 उदाहरण 2 : 286921

869 का पूरक, निखिलम् सूत्र से 131 है और पूर्व अंक $2 + 1 = 3$। अतः $286921 = 3\bar{1}\bar{3}\bar{1}21$

एक ध्यान देने योग्य बात यह है कि अन्तिम अंक 2, 1 पहले के समान रहते हैं और 869 से बायीं ओर का अंक 2+1=3 हो जाता है।

1·1·4 उदाहरण 3 : 782893

$782893 = 1\bar{2}\bar{2}3\bar{1}\bar{1}3$

1·1·5 सामान्य रूप :

अब कुछ ऐसे उदाहरणों को लें जिनमें 'विनकुलम्' युक्त संख्या को सामान्य बनाना है। यह एक अत्यन्त रोचक तथ्य है कि निखिलम् सूत्र को यहां भी प्रयोग किया जा सकता है। केवल एक अन्तर यह है कि विनकुलम् वाले अंक के बायीं ओर के अंक में से 1 घटा दिया जाता है।

1·1·6 उदाहरण 4 : $3\bar{3}\bar{4}\bar{2}$

यहाँ पर विनकुलम् युक्त 3 अंक एक समूह में हैं। निखिलम् सूत्र से हम इस समूह का पूरक सीधे ही लिख सकते हैं और हमें इस समूह के बायीं ओर वाले अंक में से 1 अवश्य घटाना है।

'निखिलम्' सूत्र से $9-3=6$, $9-4=5$ और $10-2=8$ और $3-1=2$

अत: $3\bar{3}\bar{4}\bar{2} = 2658$

1·1·7 उदाहरण 5 : $2\bar{3}\bar{2}6\bar{1}\bar{1}2$

अत: $2\bar{3}\bar{2}6\bar{1}\bar{1}2 = 1685892$

1·2 विनकुलम् संख्याओं का योग (भाग–1) :

विनकुलम् रूप में संख्याओं का योग सामान्य रूप वाली संख्याओं के समान है एक अन्तर यह है कि इसमें प्रत्येक अंक को जोड़ते समय इसके चिन्ह का भी ध्यान रखना होता है। नीचे दिये गये उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायेगा।

1·2·1 उदाहरण 6 :

$$\begin{array}{r} -5\bar{4}\bar{4}4\bar{2} \\ +7\bar{5}3\bar{5}6 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $\bar{2}+6=4$

चरण 2 : दहाई के स्थान पर $\bar{5}+4=-5+4=-1=\bar{1}$

चरण 3 : सैंकड़े के स्थान के लिए $3+\bar{4}=3-4=-1=\bar{1}$

चरण 4 : हजारवें स्थान पर $\bar{4}+\bar{5}=\bar{9}$

चरण 5 : अन्तिम स्थान पर $7+5=12$

कुल योग $12\bar{9}\bar{1}\bar{1}4$ प्राप्त होता है निखिलम् सूत्र से विनकुलम् युक्त संख्याओं के समूह का पूरक लिखने पर और उससे पहली वाली संख्या में से 1 घटाने पर निम्न योगफल प्राप्त होता है। $12\bar{9}\bar{1}\bar{1}$ का पूरक $= 11089$

अन्तिम योगफल $= 110894$

1·3 विनकुलम् संख्याओं का घटाना (भाग 1) :

विनकुलम संख्याओं का घटाना भी सामान्य संख्याओं के घटाने जैसा ही है। केवल अन्तर यह है कि प्रत्येक अंक को चिन्ह के साथ ही प्रयोग में लाया जाता है निम्न उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

1·3·1 उदाहरण 7 :

1. $5-3=2$
2. $2-4=-2=\bar{2}$
3. $4-\bar{2}=4-(-2)=4+2=6$
4. $\bar{3}-4=-3-4=-7=\bar{7}$
5. $\bar{2}-\bar{3}=-2-(-3)=-2+3=1$
6. $\bar{6}-\bar{2}=-6-(-2)-6+2=-4=\bar{4}$

विनकुलम् युक्त संख्याओं का घटाना ऊपर दर्शायी गई छः स्थितियों में से किसी एक प्रकार का होगा। घटाने के लिये कहीं भी हासिल की आवश्यकता नहीं होगी। जैसे कि 2, 4, 5 एवं 6 स्थिति में दिखाया गया है।

1·3·2 उदाहरण 8 :

$$\begin{array}{r} 7\ \bar{4}\ 2\ \bar{3}\ 4 \\ -2\ \bar{2}\ 4\ \bar{4}\ 5 \\ \hline 5\ \bar{2}\ \bar{2}\ 1\ \bar{1} \end{array}$$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $4-5=-1=\bar{1}$

चरण 2 : दहाई के स्थान पर $\bar{3}-\bar{4}=-3-(-4)=-3+4=1$

चरण 3 : सैंकड़े के स्थान पर $2-4=-2=\bar{2}$

चरण 4 : हजारवें स्थान पर $\bar{4}-\bar{2}=-4-(-2)=\bar{4}+2=-2=\bar{2}$

चरण 5 : अन्तिम स्थान पर $7-2=5$

अतः उत्तर में प्राप्त होता है $5\bar{2}\bar{2}1\bar{1}$ इसको सामान्य बनाने पर 47809 प्राप्त होता है।

1·4 निष्कर्ष :

ऊपर दर्शाये गये उदाहरणों पर कहीं भी हासिल नहीं लिया गया। तथापि यह पूर्णतः सत्य नहीं है विशेषकर ऐसी स्थिति में जहाँ पर दो अंकों का योगफल 9

से अधिक आता है तो अतिरिक्त अंक को अगले स्तम्भ में प्रति स्थापित कर देते हैं। इसके लिये सरल शुद्धिकरण विधि का प्रयोग होता है जो कि योग के अध्याय में दर्शाया गया है।

1·5 विनकुलम् युक्त संख्याओं का गुणन .

विनकुलम् युक्त संख्याओं का गुणन बीजगणित के गुणन के सरल नियमों के द्वारा किया जाता है।

1·5·1 उदाहरण 9 :

1. $4 \times 2 = 8$
2. $\bar{2} \times 4 = -2 \times 4 = -8 = \bar{8}$
3. $\bar{3} \times \bar{2} = -3 \times (-2) = 6$

1·6 निष्कर्ष :

1. यद्यपि विनकुलम् को सामान्यतया नहीं पढ़ाया जाता है तो भी यह एक रोचक तथ्य है कि इसे कम्प्यूटर में भी प्रयोग किया जाता है।

2. यदि विनकुलम् का प्रयोग किया जाये तब बहुत सी क्रियाऐं अत्यन्त ही सरल हो जाती हैं।

1·7 विनकुलम् संख्याओं का जोड़ (भाग 2) :

यह कोई आवश्यक नहीं है कि विनकुलम् युक्त संख्या के सभी अंक 5 अथवा 5 से कम हो। विनकुलम् संख्या में दोनों धनात्मक और ऋणात्मक अंक होते हैं और ऋणात्मक संख्याओं को एक बार (—) से दिखाते हैं।

विनकुलम संख्याओं को जोड़ते समय कभी-कभी हासिल का प्रयोग करना होता है। अतः इसे वैदिक शुद्धाः सूत्र से करते हैं। विनकुलम युक्त संख्याओं में दो प्रकार की स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती है। प्रथम, जब धनात्मक अंकों का योग 9 से अधिक आता है तो हम शुद्धाः कहते हैं और उस स्तम्भ में एक अंक के ऊपर बिन्दु (·) रख देते हैं और इकाई का अंक उसी रूप में रख दिया जाता है। द्वितीय स्थिति वह है जिसमें ऋणात्मक अंकों का योग 9 से अधिक आता है। इसमें भी पुनः शुद्धाः का उच्चारण करते हैं और अन्तिम ऋणात्मक अंक के ऊपर एक बिन्दु (·) रख देते हैं एवं दहाई के अंक में 1 जोड़ते हैं। इकाई के अंक का उसी रूप में आगे प्रयोग करते हैं। योगफल में यह अंक ऋणात्मक होगा अतः इसे बार (—) के साथ ही रखेंगे। आगे धनात्मक अंकों की प्रक्रिया में अगले स्तम्भ में जोड़ा गया 1 धनात्मक होगा। इसी प्रकार ऋणात्मक अंकों की प्रक्रिया में अगले स्तम्भ में जोड़ा गया 1 ऋणात्मक अंक है आगे दिये गये उदाहरणों से यह पूर्णतः स्पष्ट हो जायेगा।

1·7·1 उदाहरण 10 :

$$\begin{array}{r} 4\bar{3}5\bar{4} \\ +\,3\bar{4}\dot{6}2 \\ \hline 7\bar{6}1\bar{2} \end{array} = 6408$$

चरण 1 : $-4+2=-2=\bar{2}$

चरण 2 : $5+6=11$ (शुद्धिकरण) 6 के ऊपर बिन्दु रखा और 1 उत्तर में होगा।

चरण 3 : (क) $-3+1=-2$ (1, 6 के ऊपर शुद्धिकरण बिन्दु के कारण है)

(ख) $-4-2=-6=\bar{6}$

चरण 4 : $4+3=7$ अतः उत्तर $7\bar{6}1\bar{2}$ प्राप्त हुआ इसे सामान्य बनाने पर 6408 मिलता है।

1·7·2 उदाहरण 11 :

$$\begin{array}{r} 2\dot{\bar{5}}\dot{\bar{5}}4 \\ +\,4\bar{4}\bar{5}\bar{5} \\ \hline 500\bar{1} \end{array}$$



चरण 1 : $4+(-5)=-1=\bar{1}$

चरण 2 : $\bar{5}+\bar{5}=\bar{1}\bar{0}$ (शुद्धिकरण)

चरण 3 : $\bar{5}+\bar{1}=\bar{6}$,

$\bar{6}+\bar{4}=\bar{1}\bar{0}$ शुद्धिकरण 0 उत्तर में होगा।

चरण 4 : $2+\bar{1}=1$

$4+1=5$ अतः उत्तर $500\bar{1}$ प्राप्त हुआ।

इसे सामान्य रूप में लिखने पर 4999 उत्तर होगा।

1·7·3 उदाहरण 12 :

$$\begin{array}{r} 5\dot{\bar{4}}\dot{\bar{5}}\dot{\bar{4}}32 \\ +\,3\bar{5}\bar{4}\bar{6}2\bar{4} \\ \hline 70005\bar{2} \end{array} = 700048$$

चरण 1 : $\bar{4}+2=\bar{2}$

चरण 2 : $3+2=5$

चरण 3 : $\bar{4}+\bar{6}=\bar{1}\bar{0}$ शुद्धाः 0 उत्तर होगा।

चरण 4 : $\bar{5}+\bar{1}=\bar{6}$

$\bar{6}+\bar{4}=\bar{1}\bar{0}$ शुद्धाः $=0$

चरण 5 : $\bar{4}+\bar{1}=\bar{5}$

$\bar{5}+\bar{5}=\bar{1}\bar{0}$ शुद्धाः $=0$

चरण 6 : $5+\bar{1}=4$

$4+3=7$

उत्तर (सामान्य रूप में) 700048

1.8 विनकुलम संख्याओं का घटाना (भाग–2)

विनकुलम संख्याओं को घटाते समय किसी प्रकार का हासिल लेने की कोई आवश्यकता नहीं है इसके स्थान पर "शुद्धा:" सूत्र, जिसको पहले ही समझाया जा चुका है, का प्रयोग करते हैं।

1·8·1 उदाहरण 13 :

$$\begin{array}{r} 426\bar{2}1\bar{4} \\ -2\bar{2}7\bar{4}4\bar{3} \\ \hline 24\bar{1}2\bar{3}\bar{1} \end{array}$$

चरण 1 : $\bar{4}-\bar{3}=-4-(-3)=-4+3=-1=\bar{1}$ (इकाई के लिये)
चरण 2 : $1-4=-3=\bar{3}$ (दहाई के लिये)
चरण 3 : $\bar{2}-\bar{4}=-2-(-4)=-2+4=2$ (सैंकड़े के लिये)
चरण 4 : $6-7=-1=\bar{1}$ (हजारवे स्थान के लिये)
चरण 5 : $2-(\bar{2})=2-(-2)=2+2=4$ (दस हजारवे स्थान के लिये)
चरण 6 : $4-2=2$ (लाखवे स्थान पर)

अतः सामान्य करने पर अन्तिम उत्तर $=239169$

1·8·2 उदाहरण 14 :

$$\begin{array}{r} 943\bar{5}1 \\ -78\bar{4}\bar{2}0 \\ \hline 2\bar{4}7\bar{3}1 \end{array}$$

चरण 1 : $1-0=1$ (इकाई के लिये)
चरण 2 : $\bar{5}-\bar{2}=-5-(-2)=-5+2=-3=\bar{3}$ (दहाई के लिये)
चरण 3 : $3-\bar{4}=3-(-4)=3+4=7$ (सैंकड़े के लिये)
चरण 4 : $4-8=-4=\bar{4}$ (हजारवें स्थान के लिये)
चरण 5 : $9-7=2$ (अन्तिम स्थान के लिये)

अतः सामान्य करने पर अन्तिम उत्तर$=16671$

1·8·3 उदाहरण 15 :

$$\begin{array}{r} 5\bar{4}32\dot{\bar{7}} \\ -2\bar{5}\bar{9}\bar{5}4 \\ \hline 3226\bar{1} \\ \hline \end{array}$$

$=32259$

चरण 1 : इकाई के स्थान पर $\bar{7}-4=-7-4=\bar{1}\bar{1}$ शुद्धा: उच्चरण करने पर 7 के ऊपर एक बिन्दु रखते हैं और $\bar{1}$ को स्थानान्तरित करते हैं। उत्तर में $\bar{1}$ को रखते हैं।

चरण 2 : 7 के ऊपर बिन्दु होने के कारण

$2+\bar{1}=2-1=1$ और $1-\bar{5}=1+5=6$

चरण 3 : सैकड़े के स्थान पर $3-\bar{9}=3+9=12$ शुद्धा: करने पर 2 के ऊपर एक बिन्दु तथा 2 को उत्तर में रखा।

चरण 4 : 3 के ऊपर बिन्दु होने के कारण

$\bar{4}+1=\bar{3}$ एवं $\bar{3}-\bar{5}=-3+5=2$

चरण 5 : $5-2=3$ प्राप्त उत्तर को सामान्य बनाने पर

अन्तिम उत्तर$=32259$

1·8·4 उदाहरण 16 :

$$\begin{array}{r} 5\;6\;\bar{4}\;\dot{8}\;3\;\bar{5} \\ -4\;\bar{2}\;\bar{5}\;\bar{5}\;\bar{2}\;4 \\ \hline 1\;8\;2\;3\;5\;\bar{9} \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : $\bar{5}-4=-5-4=-9=\bar{9}$

चरण 2 : दहाई के स्थान पर $3-\bar{2}=3+2=5$

चरण 3 : $8-\bar{5}=8+5=13$ शुद्धा: करने पर 8 के ऊपर एक बिन्दु रखा तथा उत्तर में 3 रखा

चरण 4 : 8 के ऊपर बिन्दु होने के कारण

$\bar{4}+1=\bar{3}$ एवं $\bar{3}-\bar{5}=-3+5=2$

चरण 5 : $6-\bar{2}=6+2=8$

चरण 6 : $5-4=1$

अत: $18235\bar{9}=182341$ **उत्तर**

1·9 निष्कर्ष :

1. विनकुलम् संख्याओं की विभिन्न प्रक्रियाओं के उदाहरणों को हमने देखा। इससे हमें इनको विश्वास पूर्वक करने में सहायता मिलेगी।
2. विनकुलम् के बहुत से प्रयोग हैं जिसके उपयोग से अंकगणितीय गणनाएँ बहुत सरल हो जाती हैं।
3. जाँच के लिये भी वैदिक विधि उपलब्ध है जो कि त्रुटियों को तुरन्त प्रकट कर देती है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित विनकुलम् संख्याओं को जोड़कर सामान्य रूप में लिखो—

(i) $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{4}\,5$
 $3\,0\,\bar{1}\,8\,\bar{1}$

(ii) $1\,3\,\bar{4}\,5\,\bar{1}\,2$
 $3\,\bar{4}\,5\,\bar{1}\,2\,\bar{3}$

(iii) $\bar{1}\,3\,\bar{2}\,2\,\bar{3}\,1\,\bar{4}$
 $4\,\bar{1}\,3\,\bar{3}\,4\,\bar{2}\,1$

प्रश्न 2. निम्नलिखित विनकुलम् संख्याओं को घटाकर परिणाम सामान्य रूप में लिखो—

(i) $0\,1\,2\,3\,4\,5\,6$
 $-6\,\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{4}\,\bar{5}\,\bar{4}\,\bar{1}$

(ii) $2\,\bar{3}\,5\,1\,0\,1$
 $-4\,\bar{4}\,1\,\bar{2}\,1\,0$

प्रश्न 3. निम्नलिखित संख्याओं को गुणा करो—

(i) $7 \times \bar{2}$ (ii) $1\bar{1} \times 3$

(iii) $15 \times \bar{4}$ (iv) $2\bar{3} \times 2$

प्रश्न 4. निम्नलिखित में किसका परिणाम सही/गलत है। गलत परिणाम को सही करके लिखो—

(i) $3\,\bar{7}\,2$
 $+1\,\bar{3}\,\bar{1}$
 $5\,0\,1$

(ii) $3\,5\,5$
 $+\bar{3}\,\bar{4}\,5$
 $0\,0\,0$

(iii) $2\,3\,4$
 $+1\,\bar{3}\,\bar{4}$
 $1\,0\,0$

(iv) $2\,7\,5$
 $-1\,\bar{2}\,3$
 $1\,9\,2$

प्रश्न 5. निम्नलिखित विनकुलम् संख्याओं को घटाकर परिणाम को सामान्य रूप में लिखो—

(i) $3\,0\,1\,8\,1$
 $-\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{4}\,5$

(ii) $5\,4\,5\,3\,4$
 $-3\,\bar{5}\,\bar{5}\,4\,\bar{7}$

(iii) $\begin{array}{r} 6\ 5\ 4\ 3 \\ -5\ \bar{4}\ \bar{6}\ \bar{3} \\ \hline \end{array}$

प्रश्न 6. निम्नलिखित विनकुलम् संख्याओं को जोड़कर परिणाम को सामान्य रूप में लिखो—

(i) $\begin{array}{r} 5\ 4\ 5 \\ \bar{4}\ 4\ 5 \\ \hline \end{array}$

(ii) $\begin{array}{r} 3\ \bar{5}\ 4\ \bar{6} \\ \bar{2}\ \bar{5}\ 6\ \bar{4} \\ \hline \end{array}$

(iii) $\begin{array}{r} 6\ \bar{1}\ \bar{4}\ \bar{3}\ 7 \\ \bar{4}\ 2\ \bar{5}\ \bar{8}\ 3 \\ \hline \end{array}$

नोट : इन सभी उदाहरणों में नीचे की संख्या ऋणात्मक संख्या है।

अध्याय-2

मिश्रित जोड़ना एवं घटाना

2·1 परिचय :

हमने पिछले अध्याय में विनकुलम् संख्याओं को जोड़ने एवं घटाने का अध्ययन किया है। इसी प्रकार हम धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं को एक साथ जोड़ एवं घटा सकते हैं, अन्तर सिर्फ इतना है कि हमें ऋणात्मक संख्याओं को पहले विनकुलम् (बार) में परिवर्तित करना पड़ेगा। साधारणतया हम धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याओं को अलग-अलग जोड़ते हैं और फिर उनके अन्तर से हमें परिणाम प्राप्त होता है। परन्तु वैदिक विधि द्वारा हम ऋणात्मक संख्याओं को विनकुलम् (बार) में परिवर्तित करके एक ही चरण में जोड़ देते हैं। विधि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

2·2 उदाहरण 1 : $374-253+245-433+327$

चरण 1 : सबसे पहले (−) ऋणात्मक संख्याओं को विनकुलम् (बार) में परिवर्तित करेंगे।

जैसे : $253=\bar{2}\bar{5}\bar{3}$

चरण 2 : अब इकाई वाली पंक्ति को जोड़ते जाते हैं

जैसे : $4+\bar{3}=1$, $1+5=6$,

$6+\bar{3}=3$, $3+7=10$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 7 & 4 \\ \bar{2} & \bar{5} & \bar{3} \\ 2 & 4 & 5 \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} \\ 3 & 2 & \dot{7} \\ \hline 2 & 6 & 0 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ पर शुद्धाः के प्रयोग द्वारा एक बिन्दु 7 के ऊपर लगाते हैं तथा 0 इकाई के स्थान पर लिखेंगे।

चरण 3 : दहाई वाली पंक्ति में जाने से पहले इकाई वाली पंक्ति में लगे बिन्दु को देखते हैं कि बिन्दु (+) धनात्मक संख्या पर अथवा बार वाली संख्या पर लगा है उस बिन्दु को दहाई वाले खाने के लिए चिन्ह सहित लेते हैं। इस स्थिति में एक बिन्दु इकाई वाली पंक्ति में (+) धनात्मक संख्या (7) पर लगा है अतः धनात्मक पंक्ति में एक बढ़ाते हुए जोड़ते चले जाते हैं जैसे : $1+7=8$, $8+\bar{5}=3$, $3+4=7$, $7+\bar{3}=4$, $4+2=6$। यहाँ पर एक रुचिकर बात यह है कि बहुत कम

स्थितियों में ही संख्या जोड़ने के बाद 10 या 10 से बड़ी हो पाती है। संख्या 6 को दहाई वाले स्थान पर लिखेंगे।

चरण 4 : यहाँ पर शुद्धा: का कोई भी बिन्दु सैकड़े वाली पंक्ति के लिए नहीं है अतः जोड़ते हुए $3+\bar{2}=1$, $1+2=3$, $3+\bar{4}=\bar{1}$, $\bar{1}+3=2$ संख्या 2 को सैकड़े वाले स्थान पर लिखेंगे।

अतः उत्तर 260 है।

नोट :—यदि किसी स्थिति में संख्याएँ बड़ी हो तो पहले उन्हें विनकुलम् विधि अपनाते हुए छोटे अंकों की संख्याओं में परिवर्तित करते हैं। ऐसा करने से हमें दो लाभ हैं एक तो संख्या छोटी हो जाती है और दूसरे जोड़ते हुए शुद्धिकरण के बिन्दु कम हो जाते हैं।

2·3 उदाहरण 2 : $275-334+499-289+534-327$

चरण 1 : यहाँ पर हम 499 और 289 को विनकुलम् विधि से छोटे अंकों की संख्या में परिवर्तित करते हैं, $499=50\bar{1}$ और $289=3\bar{1}\bar{1}$, $-289=\bar{3}11$ अब हम सामान्य तरीके से जोड़ते चले जाते हैं।

चरण 2 : अब इकाई वाली पंक्ति को जोड़ते हैं
$5+\bar{4}=1$, $1+\bar{1}=0$, $0+1=1$,
$1+4=5$, $5+\bar{7}=\bar{2}$
$\bar{2}$ को इकाई वाले स्थान पर लिखते हैं।

चरण 3 : अब दहाई वाली पंक्ति को जोड़ते हैं
$7+\bar{3}=4$, $4+0=4$,
$4+1=5$, $5+3=8$, $8+\bar{2}=6$

$$\begin{array}{r} 2\;7\;5 \\ \bar{3}\;\bar{3}\;\bar{4} \\ 5\;0\;\bar{1} \\ \bar{3}\;1\;1 \\ 5\;3\;4 \\ \bar{3}\;\bar{2}\;\bar{7} \\ \hline 3\;6\;\bar{2} \\ \hline \end{array}$$

चरण 4 : सैकड़े वाली पंक्ति को जोड़ते हैं।
$2+\bar{3}=\bar{1}$, $\bar{1}+5=4$, $4+\bar{3}=1$, $1+5=6$
$6+\bar{3}=3$ अतः उत्तर $36\bar{2}$ है।

उत्तर को सामान्य रूप में परिवर्तित करने पर 358 अन्तिम उत्तर है।

2·4 उदाहरण 3 :

$2893-1477+1809-499-1434+999+4345$
$+1434+2343-1342$

चरण 1 : सबसे पहले 2893, 1809, 499, 999 को विनकुलम् रूप में लिखते हैं।

$2893 = 3\bar{1}\bar{1}3$

$1809 = 2\bar{2}1\bar{1}$

$499 = 50\bar{1}$, $-499 = \bar{5}01$

$999 = 100\bar{1}$

अब सामान्य रूप से जोड़ते जाते हैं

$$\begin{array}{cccc} 3 & \bar{1} & \bar{1} & 3 \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{7} & \bar{7} \\ 2 & \bar{2} & 1 & \bar{1} \\ & \dot{\bar{5}} & 0 & 1 \\ \bar{1} & \bar{4} & \dot{\bar{3}} & \bar{4} \\ 1 & 0 & 0 & \bar{1} \\ 4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ \dot{2} & 3 & \dot{4} & 3 \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \hline \end{array}$$

$1\ \bar{1}\ 1\ \bar{3}\ 1 = 9071$

चरण 2 : इकाई वाली पंक्ति को जोड़ते हैं।

$3+\bar{7}=\bar{4}$ $\bar{4}+\bar{1}=\bar{5}$, $\bar{5}+1=\bar{4}$,

$\bar{4}+\bar{4}=\bar{8}$, $\bar{8}+\bar{1}=\bar{9}$, $\bar{9}+5=\bar{4}$,

$4+\bar{4}=0$, $0+3=3$, $3+\bar{2}=1$

चरण 3 : दहाई वाली पंक्ति की संख्याएँ जोड़ते हैं।

$\bar{1}+\bar{7}=\bar{8}$, $\bar{8}+1=\bar{7}$, $\bar{7}+\bar{3}=\bar{1}\bar{0}$ (शुद्धा:), $0+4=4$

$4+3=7$, $7+4=1$ (शुद्धा:), $1+\bar{4}=\bar{3}$

चरण 4 : अब सैकड़े वाली पंक्ति की संख्याओं को जोड़ते हैं। परन्तु दहाई वाली पंक्ति में 2 बिन्दु हैं। जिसमें एक बिन्दु (—) ऋणात्मक तथा एक धनात्मक संख्या पर है अत: $1+\bar{1}=0$, $0+\bar{1}=\bar{1}$, $\bar{1}+\bar{4}=\bar{5}$, $\bar{5}+\bar{2}=\bar{7}$, $\bar{7}+\bar{5}=\bar{1}\bar{2}$ (शुद्धा:), $\bar{2}+\bar{4}=\bar{6}$, $\bar{6}+3=\bar{3}$, $\bar{3}+4=1$, $1+3=4$, $4+\bar{3}=1$

चरण 5 : सैकड़े वाली पंक्ति में एक बिन्दु (—) ऋणात्मक संख्या पर है। अत: अब हासिल के $\bar{1}$ में अगली पंक्ति की संख्याओं को जोड़ते जाते हैं।

$\bar{1}+3=2$, $2+\bar{1}=1$, $1+2=3$, $3+\bar{1}=2$

$2+1=3$, $3+4=7$, $7+1=8$, $8+2=10$

(शुद्धा:) $0+\bar{1}=\bar{1}$

चरण 6 : अगली पंक्ति में एक बिन्दु होने के कारण (।) को दस हजारवें स्थान पर लिखेंगे।

अत: उत्तर $1\ \bar{1}\ 1\ \bar{3}\ 1 = 9071$ है।

2·5 उदाहरण 4 :

$$234-176+583+378-289$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \bar{1} & \bar{7} & \bar{6} \\ 5 & 8 & 3 \\ \dot{3} & \dot{7} & 8 \\ \bar{2} & \bar{8} & \bar{9} \\ \hline \end{array}$$

$1\ \bar{2}\ \bar{7}\ 0 = 730$ उत्तर

2·6 उदाहरण 5 :

$$434 - 154 - 145 - 789 - 445 - 244$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 4 \\ \bar{1} & \bar{5} & \bar{4} \\ \bar{1} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{8} & 1 & 1 \\ \dot{\bar{4}} & \dot{\bar{4}} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{4} & \dot{\bar{4}} \\ \hline \end{array}$$

$\bar{1}\ \bar{3}\ \bar{4}\ \bar{3} = -1343$ एक ऋणात्मक उत्तर

अभ्यास :

नीचे दिए गए प्रश्नों को जोड़ो :

(i) $317 + 512 - 216 + 412 + 213 - 467 + 219$

(ii) $3158 + 8196 - 8164 + 8199 + 2165 - 956$

(iii) $21893 + 8517 - 21385 - 8168 + 26595 - 31493 - 29617 + 8197$

(iv) $6156 - 8953 + 41315 + 21689 - 5123 - 6895 + 81963 - 67314$

(v) $319 + 21589 -- 15317 + 2168 - 5339 + 81963 - 41957 - 213 + 156 - 181$

(vi) $645 - 346 + 2196 + 3245 - 899 - 767 + 392$

(vii) $989 - 1994 - 2386 + 4578 - 2488 + 999 - 88$

(निखिलं सूत्र का प्रयोग करो)

(viii) $2456 + 399 + 645 - 245 + 482 - 420 - 299$

(ix) $999 - 888 + 777 -- 666 + 555 -- 444$

(x) $425 + 524 - 646 + 864 - 22 + 111 - 989$

(xi) $567 + 480 - 395 - 267 + 1199 - 04667$

अध्याय-3

विनकुलम् संख्याओं की जाँच

3·1 परिचय :

हमने पुष्प 1 में जोड़ने एवं घटाने तथा गुणा की सरल वैदिक जाँच का अध्ययन किया है। विनकुलम् संख्याओं की जाँच भी हम उसी विधि द्वारा कर सकते हैं। यहाँ मात्र थोड़े ही परिवर्तन की आवश्यकता होती है। पूर्व की भाँति हम सूत्र 15—गुणित समुच्चय: का प्रयोग करते हैं। विधि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

3·2 जोड़ की जांच :

विनकुलम् जोड़ की जाँच करने के लिए उन्हीं चरणों की आवश्यकता पड़ती है जो सामान्य जोड़ की जांच के लिए प्रयोग होते हैं। (अध्याय 4, पुष्प 1)

3·2·1 उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{2}\ 5\ 4 \\ +2\ 5\ 6\ \bar{3} \\ \hline 5\ 4\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : मूल संख्या के सभी अंकों को जोड़कर एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करो।

$3+\bar{2}=1,\ 1+5=6,\ 6+4=10;\ 1+0=1$

चरण 2 : अब जोड़े जाने वाली संख्या को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करेंगे।

$2+5=7,\ 7+6=13;\ 1+3=4,\ 4+\bar{3}=1$

चरण 3 : अब हम चरण 1 व 2 में प्राप्त दोनों एक अंकीय संख्याओं को जोड़ेंगे।

$1+1=2$

चरण 4 : परिणाम के अंकों को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करेंगे।

$5+4=9,\ 9+1=10;\ 1+0=1,\ 1+1=2$

चरण 5 : चरण 3 व 4 में प्राप्त संख्याओं की तुलना करो।

अत: 2=2 ! **परिणाम सही है।**

3·2·2 उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{2}\ \dot{\bar{5}}\ 3 \\ +5\ 3\ \bar{5}\ \bar{4} \\ \hline 9\ 0\ 0\ \bar{1} \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : मूल संख्या को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करो।

$4+\bar{2}=2,\ \ 2+\bar{5}=\bar{3},\ \ \bar{3}+3=0$

चरण 2 : द्वितीय संख्या

$5+3=8,\ \ 8+\bar{5}=3,\ \ 3+\bar{4}=\bar{1}$

चरण 3 : $0+\bar{1}=\bar{1}$

चरण 4 : परिणाम $9+0=9,\ \ 9+0=9,\ \ 9+\bar{1}=8$

चरण 5 : नोट : वैदिक विनकुलम् की जाँच विधि

$\bar{1}=9-1=8$

$8=8$ परिणाम सही है।

टिप्पणी : विनकुलम् संख्याओं की जांच करते समय हमें एक विशेष पहलू पर ध्यान देना आवश्यक है। जांच करते समय अंकों की धूरी अंक 9 होती है। क्योंकि अंक $10=1+0=1$, हर धनात्मक अंक का सामान्य ऋणात्मक अंक, अंक 9 से पूरक अंक होगा।

इस प्रकार अंक

$9\equiv 0$

$8\equiv -1=(8-9)=\bar{1}$

$7\equiv -2=(7-9)=\bar{2}$

$6\equiv -3=(6-9)=\bar{3}$

$5\equiv -\bar{4}=(5-9)=\bar{4}$

$4\equiv -5=(4-9)$ आदि

विवेचना—हम प्रत्येक संख्या (मूल संख्या व जोड़े जाने वाली संख्या) को एक अंकीय संख्या में बदलते हैं। फिर दोनों को आपस में जोड़ते हैं इससे जो एक अकीय संख्या प्राप्त होती है वह, परिणाम को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करने के बाद प्राप्त एक अंक के बराबर होनी चाहिए। यदि वह दोनों समान है तो परिणाम सही है।

3·2·3 उदाहरण 3 :

$$\begin{array}{r} 5\ \dot{\bar{4}}\ \dot{\bar{5}}\ \dot{\bar{4}}\ 3\ 2 \\ +3\ \bar{5}\ \bar{4}\ \bar{6}\ 2\ \bar{4} \\ \hline 7\ 0\ 0\ 0\ 5\ \bar{2} \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : $5+\bar{4}=1$, $1+\bar{5}=\bar{4}$, $\bar{4}+\bar{4}=\bar{8}$, $\bar{8}+3=\bar{5}$;
$\bar{5}+2=\bar{3}$

चरण 2 : $3+\bar{5}=\bar{2}$, $\bar{2}+\bar{4}=\bar{6}$, $\bar{6}+\bar{6}=\bar{1}\bar{2}$; $\bar{1}+\bar{2}=\bar{3}$,
$\bar{3}+2=\bar{1}$, $\bar{1}+\bar{4}=\bar{5}$

चरण 3 : $\bar{3}+\bar{5}=\bar{8}$

चरण 4 : परिणाम $7+5=12$; $1+2=3$, $3+\bar{2}=1$

चरण 5 : $9+\bar{8}=1$

चरण 6 : $1=1$ परिणाम सही है।

3·3 घटाना : जोड़ की तरह ही घटाने की जाँच विधि भी वैसे ही है। अतिरिक्त चरण निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेंगे।

3·3·1 उदाहरण 4 :

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{5}\ \dot{3}\ 3\ \bar{7} \\ -2\ \bar{5}\ \bar{8}\ \bar{7}\ 4 \\ \hline 2\ 1\ 1\ 9\ \bar{1} \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : $4+\bar{5}=\bar{1}$, $\bar{1}+3=2$, $2+3=5$;
$5+\bar{7}=\bar{2}$

चरण 2 : $2+\bar{5}=\bar{3}$, $\bar{8}+\bar{3}=\bar{1}\bar{1}$; $\bar{1}+\bar{1}=\bar{2}$, $\bar{2}+\bar{7}=\bar{9}$,
$\bar{9}+4=\bar{5}$

चरण 3 : परिणाम $2+1=3$, $3+1=4$, $4+9=13$;
$1+3=4$, $4+\bar{1}=3$

चरण 4 : $\bar{5}+3=\bar{2}$ (परिणाम चरण 2 व 3 के)

चरण 5 : $\bar{2}=\bar{2}$ (परिणाम चरण 1 व 4 के)
अतः उत्तर सही है।

विवेचना—हम तीनों संख्याओं को एक अंकीय संख्या में बदलते हैं (चरण 1, 2 व 3 में)। उत्तर की एक अंकीय संख्या को घटाये जाने वाली एक अंकीय संख्या में जोड़ते हैं। प्राप्त एक अंकीय संख्या मूल एक अंकीय संख्या के समान होनी चाहिए।

3·3·2 उदाहरण 5 :

$$\begin{array}{r} 5\ 6\ \bar{4}\ 8\ 3\ \bar{5} \\ -4\ \bar{2}\ \bar{5}\ \bar{5}\ \bar{2}\ 4 \\ \hline 1\ 8\ 2\ 3\ 5\ \bar{9} \\ \hline \end{array}$$

चरण 1 : $5+6=11$, $1+1=2$, $2+\bar{4}=\bar{2}$, $\bar{2}+8=6$, $6+3=9$, $9+\bar{5}=4$

चरण 2 : $4+\bar{2}=2$, $2+\bar{5}=\bar{3}$, $\bar{3}+\bar{5}=\bar{8}$, $\bar{8}+\bar{2}=\bar{1}\bar{0}$, $\bar{1}+\bar{0}=\bar{1}$, $4+\bar{1}=3$

चरण 3 : $1+8=9$, $9+2=11$; $1+1=2$, $2+3=5$, $5+5=10$; $1+0=1$, $1+\bar{9}=\bar{8}$

चरण 4 : $\bar{8}+3=\bar{5}$ (चरण 2 व 3 से) $9+\bar{5}=4$

चरण 5 : $4=4$ (चरण 1 व 4 से) परिणाम सही है।

3·4 मिश्रित जोड़ना एवं घटाना : वैदिक जांच का यह सरल तरीका मिश्रित जोड़ एवं घटा के लिए भी उपयुक्त है। इसके सभी चरण इसी प्रकार हैं जिस तरह हम वैदिक विधि द्वारा जोड़ की जाँच करते हैं। नोट करने वाला अतिरिक्त पहलू अंक 9 की धूरी है। (3·2·2 की टिप्पणी का अवलोकन करें।)

3·4·1 उदाहरण 6 :

वैदिक जाँच विधि द्वारा हम पिछले अध्याय के उदाहरण 2 की जाँच करते हैं।

	एक अंकीय संख्या
$2\ 7\ 5$	5
$\bar{3}\ 3\ \bar{4}$	$\bar{1}$
$5\ 0\ \bar{1}$	4
$\bar{3}\ 1\ 1$	$\bar{1}$
$5\ 3\ 4$	3
$\bar{3}\ \bar{2}\ 7$	$\bar{3}$

$3\ 6\ \bar{2}=7/\bar{2}$

(सभी एक अंकीय संख्याओं का एक अंकीय जोड़)

$9+\bar{2}=7$ (3·2·2 को देखें)

अतः $7=7$ परिणाम सही है।

3·4·2 उदाहरण 7 : निम्न उदाहरण की जाँच करें—

	जाँच
3 4 4	2
$\bar{1}\ \bar{6}\ \bar{7}$	$\bar{5}$
$\bar{2}\ \bar{5}\ \bar{4}$	$\bar{2}$
8 0 2	1
$\bar{2}\ \bar{4}\ \bar{7}$	$\bar{4}$
$\bar{1}\ \bar{3}\ \bar{6}$	$\bar{1}$
$4\ \bar{5}\ \bar{8}=\bar{9}$	$\bar{9}$

$\bar{9}=\bar{9}$ परिणाम सही है।

3·5 विनकुलम् संख्याओं की जाँच : विनकुलम् संख्याओं को सामान्य रूप में तथा सामान्य संख्याओं को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करने पर उसकी शुद्धता की जाँच हम वैदिक विधि से कर सकते हैं।

जांच करने की विधि वही है। निम्नलिखित उदाहरणों से विधि स्पष्ट हो जाएगी।

3·5·1 उदाहरण 8 :

$46313=5\bar{4}313$ (विनकुलम् रूप)

चरण 1 : $4+6=10$, $1+0=1$, $1+3=4$,
$4+1=5$, $5+3=8$

चरण 2 : विनकुलम् रूप $5+\bar{4}=1$, $1+3=4$
$4+1=5$, $5+3=8$

चरण 3 : $8=8$ परिणाम सही है।

3·5·2 उदाहरण 9 : इसी प्रकार हम विनकुलम् संख्या $2\bar{5}9\bar{5}4$ को सामान्य रूप 14054 में परिवर्तित करके प्राप्त संख्या की जाँच कर सकते हैं।

चरण 1 : विनकुलम् संख्या $2+\bar{5}=\bar{3}$,
$\bar{3}+9=\bar{3}$, $\bar{3}+\bar{5}=\bar{8}$,
$\bar{8}+4=\bar{4}$

चरण 2 : सामान्य रूप $1+4=5$, $5+5=10$,
$1+0=1$, $1+4=5$

चरण 3 : हम जानते हैं कि $9+\bar{4}=5$ (चरण 1)

चरण 4 : $5=5$ परिणाम सही है।

विवेचना : 1. इस अध्याय में हमने पुन: वैदिक जांच सूत्र "गुणित समुच्चय:" का उपयोग करके हर प्रकार की विनकुलम् संख्याओं के कार्य की जाँच विधि विस्तार से देखी।

2. थोड़े से अभ्यास के बाद हम इस जाँच के कार्य को सीधा, मानसिक गणना के द्वारा, मात्र कुछ क्षणों में ही सम्पन्न कर सकते हैं।

3. इस वैदिक सूत्र का विस्तार से अध्ययन हम पुष्प 3 में करेंगे।

4. वैदिक जांच की विधि बहुत ही सरल, सुलभ व निराली है :

5. पुन: हम यह देखते हैं कि जाँच की यह विधि मात्र वैदिक गणित में ही उपलब्ध है। जो कि गणितीय कार्य में होने वाली साधारण त्रुटियों को बड़ी ही सरलता से पकड़ने में सहायक है।

अभ्यास :

1. अध्याय 1 व 2 के सभी प्रश्नों की वैदिक विधि से जाँच करो।

2. वैदिक विधि द्वारा जाँच करके बताइये कि निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर सही है या नहीं।

(i) $4597456 = 45135\bar{4}\bar{4}$

(ii) $98976423 = 10\bar{1}\bar{1}\bar{3}\bar{4}423$

(iii)
$$\begin{array}{r} 3\;4\;\bar{5}\;\bar{6} \\ +2\;2\;\bar{4}\;\bar{3} \\ \hline 5\;9\;\bar{8}\;\bar{9} \\ \hline \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{r} 5\;4\;6\;7 \\ -2\;\bar{4}\;\bar{6}\;\bar{8} \\ \hline 3\;0\;0\;5 \\ \hline \end{array}$$

(v)
$$\begin{array}{r} 5\;4\;\bar{3}\;7 \\ 2\;\bar{4}\;5\;\bar{6} \\ +3\;\bar{5}\;\bar{5}\;6 \\ \hline 1\;0\;\bar{5}\;2\;9 \\ \hline \end{array}$$

अध्याय-4

मिश्रित जोड़ व घटाना

4·1 मिश्रित घटाना (Compound Subtraction) : मिश्रित घटाने के प्रश्न को वैदिक गणित में क्रमबद्ध साधारण जोड़ व घटाने में विभाजित कर दिया जाता है। जब भी किसी बड़ी संख्या को छोटी संख्या में से घटाना होता है तो पुनः उप सूत्र "शुद्धाः" का प्रयोग किया जाता है। वैदिक गणित में विभिन्न इकाइयों को बदलने की आवश्यकता नहीं पड़ती है, इन्हें साधारण विधि के द्वारा हल किया जा सकता है। इसे विस्तारपूर्वक निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा समझा जा सकता है—

4·1·1 उदाहरण 1 :

5 गज	1 फीट	9 इंच
—2	2	11

चरण 1 : 11 जो कि इंच के स्थान पर संख्या है ऊपर लिखे अंक 9 से अधिक है इसलिए यहाँ पर शुद्धिकरण की आवश्यकता है—

(अ) शुद्धाः बिन्दु 11 के पहले लिखे अंक के ऊपर लगा देंगे, यहाँ पर यह 2 के ऊपर लगेगा।

(ब) अब नीचे की संख्या को मात्रक माप में से घटाकर (यहाँ पर 1 फीट, उसमें 12″ होते हैं) पूरक संख्या प्राप्त की। यहाँ $12'' - 11'' = 1''$

(स) इस प्राप्त संख्या को ऊपर के अंक में जोड़ देंगे $= 1 + 9 = 10''$
यह उत्तर का पहला भाग है।

5 गज	1 फुट	9 इंच
—2	$\dot{2}$	11
		10

चरण 2 : अब हम अगले मात्रक को लेंगे जो कि यहाँ पर फुट है। यहाँ 2 के ऊपर एक बिन्दु है इसलिए इसे एक अंक से बढ़ा देंगे यहाँ $2 + 1 = 3$ हो जाएगा, यहाँ पर फिर 3, ऊपर लिखे अंक 1 से ज्यादा है इसलिये पुनः शुद्धिकरण की आवश्यकता है।

(अ) हम शुद्धाः बिन्दु को अगले नीचे लिखे अंक के ऊपर लगा देंगे, यहाँ पर यह 2 गज है।

(ब) अब फुट का पूरक मात्रक (गज) लेंगे (1 गज में 3 फुट होते हैं) इस प्रकार 3 — 3 = 0

(स) इस प्राप्त पूरक अंक को ऊपर लिखे अंक में जोड़ देंगे, इस प्रकार 1 + 0 = 1

5 गज	1 फुट	9 इंच
— 2̇	2̇	11
	1	10

चरण 3 : अब हम अगले मात्रक को देखेंगे, जो कि यहाँ पर गज है यहाँ पर भी नीचे लिखे अंक पर एक बिन्दु है, इसलिए इसमें हम एक अंक बढ़ा देंगे, इस प्रकार 2 + 1 = 3 हो जाएगा। यहाँ पर नीचे लिखा अंक ऊपर लिखे अंक से कम है इसलिए साधारण रूप से घटाया जाएगा। 5 — 3 = 2 गज।

इस प्रकार पूरा उत्तर होगा, 2 गज, 1 फुट और 10 इन्च।

टिप्पणी : वैदिक गणित के मिश्रित घटाने के प्रश्नों में हम देखते हैं कि किसी भी प्रकार के हासिल लेने की कोई आवश्यकता नहीं होती है। केवल हम प्रत्येक संख्या की मात्रक माप से पूरक संख्या निकालते हैं। यह आसान होता है और गलती होने की भी संभावना कम होती है।

4·1·2 उदाहरण 2 :

1 दशक	3 वर्ष	3 महीने	5 दिन	13 घंटे	50 मि०	30 से०
0	2	4	5	15	55	25

चरण 1 :

30 — 25 = 5 सेकण्ड प्रथम मात्रक का उत्तर आसानी से निकल जाएगा।

चरण 2 : 55 मि०, 50 मि० से अधिक है, इसलिए यहाँ पर शुद्धिकरण की आवश्यकता होगी, हम इसके आगे लिखी संख्या पर एक बिन्दु लगा देंगे। इस 55 मि० का पूरक मात्रक 5 मि० होगा (क्योंकि 1 घण्टे में 60 मिनट होते हैं और 60 — 55 = 5 मि०) इसे ऊपर लिखी संख्या 50 मि० में जोड़ देंगे।

5 + 50 = 55 मि०

1 दशक	3 वर्ष	3 महीने	5 दिन	13 घण्टे	50 मि०	30 से०
0	2	4	5	15̇	55	25 से०
				21	55	5

चरण 3 : अगला मात्रक घंटा है। इसके ऊपर बिन्दु लगा है इसलिए इसे 1 अंक बढ़ा देंगे (15+1=16), यहाँ पर फिर यह ऊपर लिखी संख्या से अधिक है इसलिए शुद्धिकरण की आवश्यकता है। शुद्धिकरण विधि दोहराते हुए अगले अंक के ऊपर बिन्दु लिखेंगे, इस 16 का पूरक मात्रक संख्या 8 है क्योंकि 24—16=8, इसे ऊपर लिखी संख्या में जोड़ देंगे। 13+8=21 यह उत्तर होगा।

चरण 4 : इसी प्रकार आगे भी हल करेंगे।

1 दशक	3 वर्ष	3 महीने	5 दिन	13 घंटे	50 मि०	30 से०
0	2	4	5	15	55	25
1	0	10	29	21	55	5

4·2 मिश्रित जोड़ना (Compound Addition) : मिश्रित जोड़ के प्रश्नों को हल करने की विधि उसी प्रकार है जिस प्रकार मिश्रित घटाने के प्रश्नों की है। जहाँ पर भी दोनों संख्यायें बड़ी हो वहाँ शुद्धिकरण का प्रयोग करते हैं। मूल अन्तर यह है कि मात्रक की पूरक संख्या को दूसरी संख्या से घटाकर उत्तर प्राप्त करते हैं।

उदाहरण :

4 गज	1 फीट	11 इन्च
+3 गज	2 फीट	8 इन्च

चरण 1 : यहाँ पर 11 इन्च एक बड़ी संख्या है, इसलिए शुद्धिकरण करेंगे, यह पूरक इकाई के काफी पास है (जो कि यहाँ पर 12 इन्च है)।

(अ) अब हम शुद्धा: बिन्दु अगले नीचे लिखे अंक पर लगायेंगे। (2 फुट पर)

(ब) मात्रक से बड़ी संख्या (11) घटायेंगे (12—11=1)

(स) इस अंक को भी नीचे लिखे अंक से घटायेंगे 8—1=7

नोट : मात्रक से दूसरी संख्या घटाकर भी कार्य कर सकते हैं।

12—8=4, 11—4=7

चरण 2 : अब हम अगले अंक को देखेंगे जो कि फुट है। यहाँ पर बड़े अंक के ऊपर बिन्दु लगा है इसलिए इसे एक अंक बढ़ा देंगे 2+1=3 फुट, शुद्धिकरण करेंगे।

(अ) अगले बड़े अंक के ऊपर बिन्दु लगा देंगे।

(व) इस अंक का पूरक अंक देखेंगे 3—3=0, इसे दूसरे अंक से घटायेंगे 1—0=1 फुट

${\dot 4}$ गज	1 फुट	11 इन्च
3	${\dot 2}$	8
8	1	7

चरण 3 : अब हम अगले अंक को देखेंगे (जो कि गज है) यहाँ पर बड़े अंक के ऊपर एक बिन्दु लगा है, इसलिए इसे एक अंक से बढ़ा देंगे, $4+1=5$, और इसे नीचे लिखे अंक में जोड़ देंगे $5+3=8$ यहां पर शुद्धिकरण की आवश्यकता नहीं है क्योंकि मात्रक काफी बड़ा है।

4·3 वैदिक जांच प्रणाली : तीसरे अध्याय में हमने जोड़ व घटाव की जाँच की आसान व तेज विधियां पढ़ी। यह वैदिक गणित का अनुपम लक्षण है। अब इस स्थिति में यह प्रश्न स्वाभाविक है कि क्या विभिन्न क्रियाओं की जाँच में प्रयुक्त, अद्वितीय वैदिक सूत्र का प्रयोग संयुक्त योग एवं व्यकलन में भी किया जा सकता है? स्वाभाविक उत्तर 'हां' है। इससे भी एक अंकीय संख्या में बदलने की क्रिया का कुछ रूपान्तरण करके प्रयोग किया जाता है। नीचे इस क्रिया को विभिन्न पदों में समझाया गया है।

4·3 1 संयुक्त व्यकलन की जांच : सर्वप्रथम हम संयुक्त घटा (व्यकलन) को लेते हैं। यहाँ हमें सामान्य व्यकलन में प्रयुक्त पदों के साथ मात्रक एवं शुद्धिकरण के बिन्दु को भी प्रत्येक मात्रक के स्थान पर लेना होगा। प्रत्येक मात्रक की जाँच आसानी से अलग-अलग की जा सकती है।

4·3·2 उदाहरण 4 :

हम नीचे दिये गये उदाहरण की सहायता से इस क्रिया को पदों में समझेंगे।

5 गज	1 फुट	9 इन्च
—${\dot 2}$ गज	${\dot 2}$ फुट	11 इन्च
2	1	10

संयुक्त व्यकलन (घटा) को शुद्धिकरण का प्रयोग करके किया गया है। हम देखते हैं कि गज व फुट के मात्रक में संख्या के ऊपर शुद्धिकरण का बिन्दु है, क्योंकि इन्च एवं फुट में बड़ी संख्या को घटा रहे हैं। इस जाँच को प्रत्येक मात्रक के लिये अलग-अलग करते हैं।

प्रथम भाग : सर्वप्रथम इन्च मात्रक लेंगे।

प्रथम पद : उत्तर 10 को एक अंकीय संख्या में बदल लेते हैं :

$$1+0=1$$

द्वितीय पद : घटायी गयी संख्या 11 को एक अंकीय संख्या में बदल लेते हैं : 1+1=2 । इस पर शुद्धिकरण का बिन्दु लगा होने पर 1 अंक की वृद्धि कर देंगे ।

तृतीय पद : अब उत्तर में प्राप्त एक अंकीय संख्या को (यहाँ 1+0=1) एवं घटायी गयी संख्या (यहाँ 1+1=2) को जोड़ देंगे 1+2=3

चतुर्थ पद : अब मूल संख्या को भी इकाई अंक में बदल लेंगे यहाँ यह 9 है। अब मात्रक मापक को मूल अंक में जोड़ देंगे, और प्राप्त संख्या को इकाई अंक में बदल लेंगे । इस प्रश्न में हम देखते हैं कि अगले मात्रक फुट पर शुद्धिकरण का बिन्दु लगा है इसलिये मात्रक माप (1 फुट=12 इन्च) को मूल अंक में जोड़ देते हैं। इसलिये 9+12=21, 2+1=3

पंचम पद जाँच : यदि संयुक्त व्यकलन सही हुआ है तो पद 3 व पद 4 में प्राप्त अक समान होने चाहिये । इस प्रश्न में यह अंक 3 है।

द्वितीय भाग : इन्च मात्रक के बाद अब उन्हीं पदों को अगले मात्रक में दोहराते हैं। अगला मात्रक फुट है।

प्रथम पद : उत्तर मात्र 1 है।

द्वितीय पद : घटाया गया अंक 2 है। अंक 2 के ऊपर शुद्धिकरण का बिन्दु है। अतः इसमें 1 की वृद्धि कर देते हैं। 2+1=3

तृतीय पद : अब उत्तर के अंक को घटाये गये अंक में जोड़ देंगे। (यहां 3+1=4)

चतुर्थ पद : मूल अंक मात्र एक है लेकिन अगले मात्रक गज में घटाये गये अंक के ऊपर शुद्धिकरण का बिन्दु है। अतः मात्रक मापक को मूल अंक में जोड़ देंगे। (यहां 1+3=4)

पंचम पद : अब पद 3 एवं 4 में प्राप्त अंकों की तुलना, उत्तर की जांच के लिये करते हैं। यहाँ दोनों अंक समान हैं (4) इसलिये उत्तर ठीक है।

भाग 3 : अब गज मात्रक को लेंगे।

प्रथम पद : उत्तर मात्र 2 है।

द्वितीय पद : घटाया गया अंक भी 2 है। लेकिन इसमें शुद्धिकरण का बिन्दु होने के कारण इसमें 1 की वृद्धि करेंगे। (2+1=3)

तृतीय पद : उत्तर एवं घटाये गये अंकों का योग करेंगे। (2+3=5)

चतुर्थ पद : मूल अंक मात्र 5 है।

पंचम पद : पद 3 एवं 4 के अंकों की तुलना करने पर दोनों अंक समान हैं। अतः व्यकलन सही है।

4·3·3 टिप्पणी :

1. संयुक्त व्यकलन का काफी सरल विधि है।

2. हालांकि तरीके को समझने एवं व्यक्त करने में काफी स्थान प्रयुक्त हुआ है परन्तु असली क्रिया केवल मानसिक/मौखिक रूप से ही की जा सकती है।
3. जाँच क्रिया में मात्र कुछ सेकिन्ड का समय लगेगा।
4. सयुक्त योग की जाँच के लिये भी इसी विधि को आगे प्रयुक्त किया जा सकता है।
5. इस बात की ओर ध्यान देना आवश्यक है कि संयुक्त व्यकलन की जाँच विधि में उत्तर को घटायी गयी संख्या में जोड़ना होता है, अतः कार्यं थोड़ा अधिक हो जाता है परन्तु विकल्प के तौर पर इस क्रिया को दोहराने का कार्य किया जा सकता है। लेकिन उसमें उसी त्रुटि को दोबारा दोहराये जाने की सम्भावना है।

4·4 संयुक्त योग की जांच विधि : पहले बतायी गयी विधि की भाँति संयुक्त योग के उत्तर की जाँच की जा सकती है। यह बात मनोरंजक है कि इन सभी जाँच विधियों में एक ही वैदिक सूत्र का प्रयोग होता है (सूत्र 15)। संयुक्त योग में भी शुद्धिकरण बिन्दु का ध्यान रखते हुये, प्रत्येक मात्रक के लिये अलग-अलग जाँच करते हैं। पुनः मात्रक माप का प्रयोग भी इस विधि में सामान रूप से किया जायेगा।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्न संयुक्त जोड़ के प्रश्नों को सरल शीघ्र वैदिक शुद्धिकरण विधि द्वारा करें :

(अ)	2 घंटे	31 मिनट	29 सेकिन्ड
	+0	59	42

(ब)	8 गज	0 फुट	9 इन्च
	+6	2	11

(स)	33 टन	11 किलोग्राम	9 ग्राम
	+21	15	18

(द)	10 किलोमीटर	245 मीटर	89 सेंटीमीटर
	+ 3	900	91

(य)	2 साल	7 महीने	26 दिन	14 घंटे	11 मिनट
	0	9	12	23	56

प्रश्न 2. प्रश्न 1 के सभी उप भागों को वैदिक शुद्धिकरण प्रणाली द्वारा संयुक्त घटाव करें।

प्रश्न 3. निम्न प्रश्नों को हल करें एवं बताएँ क्या लगाये गये शुद्धिकरण बिन्दु सही हैं।

(अ)	5	2 फुट	4 इन्च
	—2̇	1̇	8

(ब)	5 साल	0 महीने	8 दिन
	—2̇	4	19

प्रश्न 4. 'गुणित' सूत्र (15) का प्रयोग करके पूर्व के सभी प्रश्नों की जाँच करें।

अध्याय-5

मिश्रित गुणन, वर्ग एवं धन मापे

5·1 भूमिका : अभी तक हमने सरल वैदिक सूत्रों का प्रयोग जोड़, घटाना, गुणन इत्यादि क्रियाओं में किया, तथा यह देखा कि वैदिक सूत्रों का प्रयोग अत्यन्त सरल एवं गतिशील है। अधिकतर क्रियायें लगभग जादू की गति से सम्पन्न होती है। वास्तविकता में यह कोई जादू नहीं है यह एक सम्पूर्ण विधि है जिसे सरलता से सीखा व प्रयोग में लाया जा सकता है। मिश्रित जोड़ एवं घटा की विधियां निश्चित ही अत्यन्त सरल एवं द्रुतगति वाली है। अब हम मिश्रित गुणन का अध्ययन करेंगे।

5·2 मिश्रित गुणन :

वैदिक गणित के "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्" (क्रमांक 3) सूत्र की सहायता से मिश्रित गुणन करते हैं। सूत्र का भावार्थ है कि लम्बित व तिरछी दिशा में गुणा करो।

5·2·1 उदाहरण 1 : एक ऐसे भूभाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी दो भुजायें 4 गज 1 फुट एवं 8 गज 2 फुट है।

4 गज	1 फुट
8 गज	2 फुट

32 / 16 / 2

चरण 1 : (अ) ऊर्ध्व सूत्र के प्रयोग से उत्तर के तीनों भागों को प्राप्त करते हैं।

(ब) दायां भाग = दायीं पंक्ति के अंकों का ऊर्ध्व गुणनफल $= 2 \times 1 = 2$

(स) मध्य का भाग = तिर्यक गुणनफल $= 1 \times 8 + 2 \times 4 = 16$ इसे मध्य में रखते हैं।

(द) बायां भाग = बायीं पंक्ति के अंकों का ऊर्ध्व गुणनफल $= 4 \times 8 = 32$

चरण 2 :

इकाई माप : वह संख्या जो कि बड़ी माप को छोटी माप में दर्शाने के लिये प्रयुक्त होती है।

यहाँ पर 1 गज = 3 फुट

अतः इकाई माप = 3

बीच वाले भाग को इस प्रकार से विभक्त करते हैं कि एक भाग इकाई माप का पूर्ण गुणांक हो तथा शेष द्वितीय भाग होगा।

यहाँ पर $5 \times 3 = 15$ प्रथम भाग होगा और शेष $16 - 15 = 1$ द्वितीय भाग होगा।

$32 \,/\, 16 \,/\, 2$

$= 32 \,/\, 5 \times 3 + 1 \,/\, 2$

चरण 3 : अब प्रथम भाग में इकाई माप को छोड़ देते हैं और गुणांक (यहाँ 5) को बायीं ओर स्थानान्तरित कर देते हैं। द्वितीय भाग को इकाई माप से गुणा करके दायीं ओर स्थानान्तरित कर देते हैं।

प्रथम भाग का गुणांक 5 है। अतः बायां भाग $= 32 + 5$

द्वितीय भाग का मान 1 है। इकाई माप से गुणा करके $1 \times 3 = 3$ प्राप्त होता है।

अतः दायां भाग $= 2 + 3 = 5$

$32 \,/\, 5 \times 3 + 1 \,/\, 2$

$= 32 + 5 \,/\quad/\, 1 \times 3 + 2$

$= 37$ वर्ग गज / 5 वर्ग फुट

इस उदाहरण को बीजगणित की सहायता के बिना ही वैदिक ऊर्ध्व सूत्र से हल किया गया है।

5·2·2 उदाहरण 2 :

8 फुट 11 इन्च एवं 11 फुट 7 इन्च को गुणा करो।

8 फुट 11 इन्च

11 फुट 7 इन्च

---

88 / 177 / 77

चरण 1 : ऊर्ध्व सूत्र के प्रयोग से

(अ) दायां भाग $= 11 \times 7 = 77$ (ऊर्ध्व गुणा)

$= 11$

(ब) बीच का भाग $= 11 \times 11 + 8 \times 7 = 121 + 56 = 177$ (तिर्यक गुणा)

(स) बायां भाग $= 8 \times 11 = 88$ (ऊर्ध्व गुणा)

चरण 2 : यहाँ पर इकाई माप 12 है (1 फुट = 12 इन्च)

बीच के भाग को विभक्त करने पर

$177 = 12 \times 14 + 9$

चरण 3 : इकाई माप को छोड़ने पर और गुणांक को बायीं ओर स्थानान्तरित किया। बायां भाग $=88+14=102$ द्वितीय भाग (9) को इकाई माप से गुणा करके दायीं ओर स्थानान्तरित किया। अतः दायां भाग $=9\times12+77$

$=108+77$

$=185$

$88 \;/\; 177 \;/\; 77=88 \;/\; 12\times14+9 \;/\; 77$

$=88+14 \;/\; \;/\; 9\times12+77$

$=102 \;/\; \;/\; 185$

परन्तु इन्च की संख्या अब इकाई माप के वर्ग (144) से बड़ी है अतः अतिरिक्त इन्च की संख्या को बायीं ओर स्थानान्तरित करते हैं।

$185=1\times144+41=1$ को बायीं ओर ले जाने पर

$102 \;/\; 185=102 \;/\; 1\times144+41=102+1 \;/\; 41$

$=103$ वर्ग फुट / 41 वर्ग इन्च

इसे पुनः लिख सकते हैं 11 वर्ग गज, 4 वर्ग फुट, 41 वर्ग इन्च। इसी कार्य को हम बीजगणितीय विधि से भी कर सकते हैं।

5·3 विनकुलम् विधि :

मिश्रित गुणा को विनकुलम् विधि से करने पर और भी सरलता से हल किया जा सकता है। पहले बड़े अंक को उनके विनकुलम् रूप में लिखते हैं, फिर उसे ऊर्ध्व सूत्र की सहायता से गुणा करते हैं।

5·3·1 उदाहरण 3 : 8 फुट 10 इन्च को 10 फुट 3 इन्च से गुणा करो।

पहले हम इन्च वाले बड़े अंकों के मात्रक माप से पूरक अंक निकालकर इसे एक बार (—) के साथ दर्शाते हैं तथा उससे पहले वाले अंक में 1 जोड़ देते हैं।

यहाँ 8 फुट 10 इन्च के लिये 10 इन्च का पूरक $12-10=2$ है जिसे (—) के साथ रखते हैं तथा फुट की संख्या में 1 जोड़ते हैं।

$8+1=9$ फुट

9 फुट $\quad \bar{2}$ इंच

10 फुट $\quad$ 3 इन्च

$90 \;/\; 7 \;/\; \bar{6}$

चरण 1 : ऊर्ध्व सूत्र के प्रयोग से तीनों भागों का उत्तर प्राप्त करते हैं

दायां भाग $=2\times3=\bar{6}$

मध्य भाग $=\bar{2}\times10+9\times3=-20+27=7$

बायां भाग $=9\times10=90$

चरण 2 : मध्य भाग इकाई माप (12) से कम है। अतः बायीं ओर कोई संख्या स्थानान्तरित नहीं करनी है। बीच वाले भाग को इकाई माप से गुणा करके दायें भाग में जोड़ते हैं। अतः $7 \times 12 = 84 + \bar{6} = 78$ वर्ग इन्च।

इस प्रकार, $90 \,/\, 7 \,/\, \bar{6} \;= 90 \,/\quad /\, 7 \times 12 + \bar{6}$

$= 90 \,/\, 78 = 90$ वर्ग फुट 78 वर्ग इन्च

इसे 10 वर्ग गज 78 वर्ग इन्च भी लिख सकते हैं।

5·4 वर्ग ज्ञात करना : हमें वर्तमान गणित में मिश्रित गुणा के प्रश्नों को हल करने की क्रमशः दो एकान्तर विधियां मिलती हैं। उदाहरणार्थ यदि हम एक भूमि का क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रश्न लेते हैं जिसका परिमाण 14 गज, 2 फुट एवं 23 गज, 2 फुट है।

5·4·1 प्रथम प्रचलित विधि : इस विधि से हम भूमि की दी हुई दोनों इकाईयों को छोटी इकाईयों में परिवर्तित करते हैं। (यहाँ पर फुट में) और फिर दोनों इकाईयों को गुणा करके क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। क्षेत्रफल का माप वर्ग इकाई में (वर्ग, फुट आदि) होगी। अब प्राप्त गुणनफल की इकाई को माप के वर्ग से भाग करके, क्षेत्रफल दो इकाईयों में मिलता है।

5·4·2 उदाहरण 4 : वर्तमान उदाहरण में परिमाण 14 गज, 2 फुट एवं 23 गज, 2 फुट है।

इसलिए 14 गज 2 फुट $= (14 \times 3) + 2$

$= 42 + 2$

$= 44$ फुट

और 23 गज 2 फुट $= (23 \times 3 + 2)$

$= 69 + 2 = 71$ फट

क्षेत्रफल = 71

×44

———

284

284×

———

3124 वर्ग फुट

अब दुबारा हमें इसे वर्ग गज एवम् फुट में परिवर्तित करना होगा ।
अत:

```
9) 3 1 2 4 (3 4 7
   2 7
   -------
     4 2
     3 6
   -------
       6 4
       6 3
   -------
       0 1
   -------
```

अत: क्षेत्रफल = 347 वर्ग गज और 1 वर्ग फुट है । यह विधि लम्बी, कठिन और अधिक समय लेने वाली है ।

अब इसी प्रश्न को द्वितीय प्रचलित एकान्तर विधि से करने का प्रयत्न करते हैं । इस प्रश्न के पहले चरण में हम दी हुई मापों को उच्च माप के भिन्न के रूप में परिवर्तित करते हैं इसके पश्चात इन भिन्नों को गुणा करके और पुन: भिन्नों से इकाई में परिवर्तित करना पड़ेगा, जो कि एक बहुत कठिन क्रिया है :

14 गज 2 फुट $= \frac{42}{3} + \frac{2}{3} = \frac{44}{3}$

23 गज 2 फुट $= \frac{69}{3} + \frac{2}{3} = \frac{71}{3}$

अब हम इन मापों को गुणा करेंगे

$$\frac{44}{3} \times \frac{71}{3} = \frac{3124}{9}$$

अब इसे वर्ग गज और वर्ग फुट में परिवर्तित करना होगा ।

```
9) 3 1 2 4 (3 4 7 वर्ग गज
   2 7
   -------
     4 2
     3 6
   -------
       6 4
       6 3
   -------
```

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 9 \\ \hline 9)\quad 9 \quad (1 \text{ वर्ग फुट} \\ 9 \\ \hline \times \end{array}$$

अतः भूमि का क्षेत्रफल = 347 वर्ग गज एवम् 1 वर्ग फुट

5·5 वैदिक विधि : इन प्रचलित विधियों के प्रयोग के अन्तर्गत हमने यह अनुभव किया कि यह दोनों एकान्तर विधियां ज्यादा लम्बी, कठिन एवम् अधिक समय लेने वाली है और इन विधियों के प्रयोग में त्रुटियां होने की सम्भावना भी है। परन्तु वैदिक विधि जो कि आगे दर्शायी गयी है अधिक सरल और साधारण भी है। इस विधि में इकाई में परिवर्तित करने के स्थान पर हम बीजगणितीय गुणा और अध्यम सूत्र का प्रयोग करते हैं। बीजगणित का प्रयोग किये बिना ही हम सीधे ऊर्ध्व सूत्र का प्रयोग करके भी हल कर सकते हैं जो कि पहले ही विस्तार में दिया गया है।

5·5·1 उदाहरण 5 : मान लो "क" इकाई माप है।

इस उदाहरण में 1 गज = 3 फुट

इसलिए क = 3

भुजा 1 = 14क + 2

और भुजा 2 = 23क + 2

क्षेत्रफल = (14क + 2) × (23क + 2) = 322क^2 + 74क + 4

अब मध्य पद को दो भागों में विभक्त करते हैं प्रथम भाग क का पूर्ण गुणांक है और भाग 2 शेषफल है

अतः क्षेत्रफल = 322क^2 + (24 × 3 + 2) क + 4

= 322क^2 + (24 × 3 + 2) क + 4 ....(1)

= 322क^2 + (24क + 2) क + 4 क्योंकि क = 3 ....(2)

= 322क^2 + 24क^2 + 2क + 4 ....(3)

= 346क^2 + 2 × 3 + 4 ....(4)

= 346क^2 + 10 = 346क^2 + 9 + 1 ....(5)

= 346क^2 + 3 × 3 + 1 ....(6)

= 346क^2 + क^2 + 1 (क्योंकि क = 3) ....(7)

= 347क^2 + 1 वर्ग फुट ....(8)

= 347 वर्ग गज, 1 वर्ग फुट

क्योंकि यहाँ पर $क^2$ वर्ग इकाई माप है $(3 \times 3 = 9)$ इसलिए $क^2$ को जोड़ने का अर्थ है कि बायां भाग अपने आप उच्चतम वर्ग इकाई में परिवर्तित हो जायेगा (वर्ग गज)। जो पद क के साथ होगा वह "क" का मान रखने से न्यूनतम इकाई को स्थानान्तरित हो जायेगा। चरण 5 में जो कि स्थिर संख्या (10) प्राप्त हुई है वह वर्ग इकाई से बड़ी है। इसे भी हम दो भागों में विभक्त करते हैं।

5·5·2 उदाहरण 6 : आईये अब हम आयताकार भूमि का क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रश्न लेते हैं जिसका परिमाण 7 फुट 8 इन्च एवं 5 फुट 11 इन्च है।

वैदिक विधि : इस उदाहरण में माना कि इकाई माप क है (क = 12) क्योंकि (1 फुट = 12 इन्च) हम जानते हैं क्षेत्रफल = भुजा 1 × भुजा 2

$$\text{अतः क्षेत्रफल} = (7क + 8) \times (5क + 11)$$
$$= 35क^2 + 117क + 88$$
$$= 35क^2 + (9 \times 12 + 9)\, क + 88$$
$$= 35क^2 + (9क + 9)\, क + 88 \quad (क = 12)$$
$$= 35क^2 + 9क^2 + 9क + 88$$
$$= 44क^2 + 108 + 88$$
$$= 44क^2 + 196$$
$$= 44क^2 + 144 + 52$$
$$= 44क^2 + (12 \times 12) + 52$$
$$= 44क^2 + क^2 + 52$$
$$= 45क^2 + 52$$
$$= 45 \text{ वर्ग फुट} + 52 \text{ वर्ग इन्च}$$

5·5·3 उदाहरण 7 : एक आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके परिमाण 3 मीटर 22 सेमी॰ और 5 मीटर 10 से॰ मीटर है यहाँ पर

इकाई माप क है (क = 100, क्योंकि 1 मी॰ = 100 सेमी॰)

$$\text{अतः क्षेत्रफल} = (3क + 22) \times (5क + 10)$$
$$= 15क^2 + 140क + 220$$
$$= 15क^2 + क^2 + 40 \times 100 + 220$$
$$= 16क^2 + 4220$$
$$= 16 \text{ वर्ग मी॰} + 4220 \text{ वर्ग सेमी॰}$$

इस उदाहरण में 4220 को दो भागों में विभाजित नहीं करना पड़ा क्योंकि यह वर्ग इकाई (10,000) से छोटा है।

5·6 टिप्पणी : हमने अभी तक वैदिक विधि का प्रयोग केवल आयताकार आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए ही किया है। इसकी प्रयोग हम समानान्तर चतुर्भुज और समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए भी कर सकते हैं।

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये प्रथम चरण में हम समानान्तर भुजाओं का औसत ज्ञात करेंगे और तब औसत को दो समानान्तर भुजाओं की बीच की लम्बवत् दूरी से गुणा करते हैं।

पुनः हम जानते हैं कि समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = एक समानान्तर भुजा की लम्बाई × उन दोनों समानान्तर भुजाओं के बीच की लम्बवत् दूरी।

इसी प्रकार **हम समलम्ब चतुर्भुज** का क्षेत्रफल भी ज्ञात कर सकते हैं।

5·7 तीन अंकों की मिश्रित गुणा : हमने अभी देखा कि वैदिक विधि के प्रयोग द्वारा संयुक्त गुणा किस तरह सरल और मनोरंजक बन जाती है एवम् बड़े गुणा व भाग की कोई आवश्यकता नहीं होती है। इस समय हमारे मन में यह प्रश्न अवश्य उठ रहा होगा कि क्या हम वैदिक विधि को दो से अधिक इकाई अंकों के प्रश्नों के हल करने में प्रयोग कर सकते हैं; क्योंकि इस तरह के प्रश्न दैनिक व्यवहार में आते हैं इस प्रश्न का उत्तर भी हां है।

5·7·1 उदाहरण 8 : एक समानान्तर क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसके परिमाण 3 गज 2 फुट 9 इन्च एवम् 5 गज 1 फुट 5 इन्च है। यहाँ इकाई मापें क और ख, क्रमशः 3 और 12 हैं।

इसलिए क्षेत्रफल $= (3\text{कख} + 2\text{ख} + 9) \times (5\text{कख} + \text{ख} + 5)$

$$\begin{array}{r} 3\text{कख} + 2\text{ख} + 9 \\ \times\ 5\text{कख} + \text{ख} + 5 \\ \hline 15\text{क}^2\text{ख}^2 + 13\text{कख}^2 + 60\text{कख} + 2\text{ख}^2 + 19\text{ख} + 45 \end{array}$$

$= 15\text{क}^2\text{ख}^2 + 4 \times 3\text{कख}^2 + \text{कख}^2 + 5 \times 12\text{कख} + 2\text{ख}^2 + 12\text{ख} + 7\text{ख} + 45$

$= 19\text{क}^2\text{ख}^2 + \text{कख}^2 + 5\text{कख}^2 + 3\text{ख}^2 + 7 \times 12 + 45$

$= 19\text{क}^2\text{ख}^2 + 6\text{कख}^2 + 3\text{ख}^2 + 129$

$= 19\text{क}^2\text{ख}^2 + 2 \times 3\text{कख}^2 + 3\text{ख}^2 + 129$

$= 21\text{क}^2\text{ख}^2 + 3\text{ख}^2 + 129$

$= 21$ वर्ग गज $+ 3$ वर्ग फुट $+ 129$ वर्ग इन्च

अतः तीन अंकों की मिश्रित गुणा से 21 वर्ग गज 3 वर्ग फुट 129 वर्ग इन्च उत्तर प्राप्त हुआ।

5·8 विवेचना : संयुक्त गुणा करने की वर्तमान विधि में इकाई अंकों को व्यर्थ में परिवर्तित करना पड़ता है और इसमें हमें बहुत से चरणों का अनुकरण करना पड़ता है जिससे विद्यार्थी के मन में गणित के प्रति बुरा प्रभाव पड़ता है। परन्तु वैदिक विधि वर्तमान विधि से ज्यादा सरल है एवम् भिन्नों को पूर्णतः निष्कापित कर देती है।

इस विधि को प्रयोग में लाते समय त्रुटि होने की सम्भावना बहुत कम है।

5·9 धन का आयतन ज्ञात करना : हमने अभी तक दो परिमाण वाले प्रश्नों को हल किया परन्तु अब वैदिक विधि से तीन परिमाण वाले प्रश्नों को हल करेंगे। एक समानान्तर धनाभ का आयतन ज्ञात करो जिसके परिमाण 3 फुट 7 इन्च, 5 फुट 10 इन्च और 7 फुट 2 इन्च है।

वैदिक विधि : हम वर्तमान प्रचलित दोनों विधियों के प्रयोग के अन्तर्गत देख सकते हैं कि यह विधियां कितनी लम्बी और कठिन हैं। परन्तु यदि इसी प्रश्न को वैदिक विधि से करें तो यह बहुत ही जल्दी व सरलता से हो जायेगा।

चरण 1 : इकाई माप = 12 वैदिक विधि द्वारा

$$\text{क्षेत्रफल} = (3\text{क} + 7) \times (5\text{क} + 10)$$
$$= 15\text{क}^2 + 65\text{क} + 70$$

चरण 2 : प्राप्त क्षेत्रफल को आयतन ज्ञात करने के लिए हम तृतीय परिमाण से गुणा करेंगे और मध्यान्तर पद (जिसमें क की घात 1 और 2 है) को उच्चतम मापों में परिवर्तित करेंगे और अध्याम सूत्र द्वारा शेष भाग को स्थिर संख्या से गुणा करेंगे।

$$= 15\text{क}^2 + 65\text{क} + 70$$
$$7\text{क} + 2$$

$$105\text{क}^3 + 30\text{क}^2 + 455\text{क}^2 + 490\text{क} + 130\text{क} + 140$$
$$= 105\text{क}^3 + 485\text{क}^2 + 620\text{क} + 140$$
$$= 105\text{क}^3 + 12 \times 40\text{क}^2 + 5\text{क}^2 + 12 \times 51\text{क} + 8\text{क} + 140$$
$$= 105\text{क}^3 + 40\text{क}^3 + 5\text{क}^2 + 51\text{क}^2 + 8 \times 12 + 140$$
$$= 145\text{क}^3 + 56\text{क}^2 + 96 + 140$$
$$= 145\text{क}^3 + 12 \times 4\text{क}^2 + 8\text{क}^2 + 236$$
$$= 149\text{क}^3 + 1152 + 236$$
$$= 149\text{क}^3 + 1388$$
$$= 149 \text{ घन फुट} + 1388 \text{ घन इन्च}$$

5·10 मिश्रित गुणा की जांच विधि :

वैदिक विधि सरल एवं अत्यन्त गतिशील है। इस विधि में पूरी संख्या को एक ही माप में बदलने की कोई आवश्यकता नहीं है।

वैदिक गणित में मिश्रित गुणा की जांच के लिये भी सरल विधि उपलब्ध है। जबकि वर्तमान गणित में इस प्रकार की कोई विधि नहीं है।

एक रोचक तथ्य यह है कि जो विधि सरल गुणा की जांच में प्रयुक्त होती है वही विधि थोड़े से परिवर्तन के पश्चात मिश्रित गुणा में प्रयोग हो सकती है। इसमें भी "समुच्चय" सूत्र (क्रमांक 15) का ही प्रयोग हुआ है। इस विधि के विभिन्न चरण निम्नलिखित उदाहरण में दर्शाये गये हैं।

5·10·1 उदाहरण 9 : 14 गज 2 फुट को 23 गज 2 फुट से गुणा करो।

$$14क + 2$$
$$23क + 2$$
$$\overline{322क^2 + 74क + 4}$$
$$= 347क^2 + 1$$

चरण 1 : गुण्य क, गुणांक एवं गुणनफल को तीन विभिन्न पंक्तियों में रखते हैं एवं उनके सामने एक बड़ा वर्ग बनाते हैं। दोनों विकर्णों को मिलाते हैं जिससे वर्ग के बीच का भाग चार समान भागों में विभाजित हो जाता है।

चरण 2 :

(1) उच्च माप के अंक को जोड़ते हैं यदि उनके 1 से अधिक अंक हो।

(2) प्राप्त एक अंकीय संख्या को इकाई माप से गुणा करके गुणनफल की पुनः एक अंकीय संख्या प्राप्त करते हैं।

(3) उपरोक्त प्राप्त एक अंकीय संख्या को निम्न माप की संख्या में जोड़ते हैं : यदि योगफल दो अंकों में प्राप्त होता है, तो उसे पुनः एक अंकीय संख्या में बदलते हैं।

(4) इस प्रकार अन्तिम एक अंकीय संख्या ऊपर के त्रिभुज में रखी जाती है।

(5) इस उदाहरण में —

(अ) 14 को एक अंकीय संख्या बनाने पर $1 + 4 = 5$

(ब) इकाई की माप 3 है। अत: $3 \times 5 = 15$, $1 + 5 = 6$

(स) 6 को 2 फुट में जोड़ते हैं। $6 + 2 = 8$

(द) प्राप्त संख्या 8 को ऊपर के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 3 : दूसरे माप के लिये भी चरण 2 की प्रणाली को अपनाने पर एक अंकीय संख्या प्राप्त करते हैं।

इस उदाहरण में

(य) 23 के लिये $2 + 3 = 5$

(र) इकाई माप 3 से गुणा करके $5 \times 3 = 15$, $1 + 5 = 6$

(ल) 6 को 2 फुट में जोड़ने पर $6 + 2 = 8$

(व) इस संख्या (8) को नीचे के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 4 : अब गुणा की जांच की तरह से ही ऊपर व नीचे वाले त्रिभुजों की संख्याओं को गुणा करते हैं एवं इसे पुनः एक अंकीय संख्या में बदलते हैं तथा इसे दायीं ओर वाले त्रिभुज में रखते हैं।

इस उदाहरण के लिये

$$8 \times 8 = 64, \quad 6 + 4 = 10, \quad 1 + 0 = 1$$

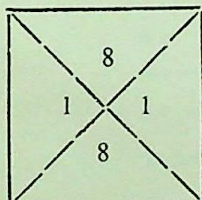
चरण 5 : प्राप्त गुणनफल के उच्च माप के अंकों को जोड़कर एक अंकीय संख्या बनाते हैं। इसे इकाई माप के वर्ग से गुणा करके एक अंकीय संख्या में बदलते हैं। इस प्रकार प्राप्त संख्या को निम्न माप की संख्या में जोड़ते हैं एवं पुनः इसे एक अंकीय संख्या में बदलते हैं। इस उदाहरण में —

347 को जोड़ने पर $3 + 4 + 7 = 14$; $1 + 4 = 5$, इसे इकाई माप के वर्ग से गुणा करते हैं (1 गज^2 = 9 फुट^2) व इस संख्या को बायीं ओर के त्रिभुज में रखते हैं। $5 \times 9 = 45$; $4 + 5 = 9$, $9 + 1 = 10$; $1 + 0 = 1$

चरण 6 : जांच : यदि बायीं और दायीं ओर वाले त्रिभुजों की संख्यायें समान हैं तो प्राप्त उत्तर शुद्ध है।

इस उदाहरण में हम दोनों त्रिभुजों में समान अंक 1 पाते हैं। अतः उत्तर सही है।

14 गज	2 फुट
23 गज	2 फुट
347 वर्ग गज	1 वर्ग फुट



$8 \times 8 = 64$
$6 + 4 = 10$
$1 + 0 = 1$

5·11 विवेचना :

(1) जांच की इसी विधि को घन मापों की जांच में भी सफलतापूर्वक प्रयोग किया जा सकता है। सभी चरण समान ही होंगे केवल अन्तर यह होगा कि इसमें इकाई माप के घन का प्रयोग करना होगा।

(2) विधि केवल थोड़े से अभ्यास के पश्चात केवल मानसिक गणनाओं से ही की जा सकती है। केवल अन्तिम एक अंकीय संख्या को ही लिखने की आवश्यकता होगी। कुछ और अभ्यास के बाद वर्ग बनाने की भी आवश्यकता नहीं होगी।

(3) एक ध्यान देने योग्य बात यह है कि यदि इकाई माप का वर्ग 9 आता है तो उच्च माप में होने वाली त्रुटि को आसानी से ज्ञात नहीं किया जा सकता है। उसकी जांच के लिये शोध की आवश्यकता है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित को हल करो—

(i) 3′8″ × 2′11″

(ii) 1 गज 2′ × 5 गज 1′

(iii) 2 गज 2′3″ × 3 गज 1′ × 7″

प्रश्न 2. निम्नलिखित ठोस चतुर्भुज का आयतन निकालिए, जिसकी विमाएँ इस प्रकार हैं—

(i) 2′5″, 2′11″, 6′8″

(ii) 4′10″, 3′9″, 2′8″

प्रश्न 3. निम्नलिखित समलम्ब चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करें। जिनकी आमने-सामने की भुजाओं की लम्बाई व लम्बित दूरी दी हुई है।

	लम्बाई	चौड़ाई	लम्बित दूरी
(i)	3′6″	2′7″	1′3″
(ii)	5′8″	3′11″	2′6″

सभी प्रश्नों के उत्तर की वैदिक विधि द्वारा जांच कीजिए।

अध्याय–6

निखिलं विधि–उपआधार

6·1 परिचय :

पुष्प 1 में हमने निखिलं सूत्र के द्वारा गुणा के जिन उदाहरणों के विषय में पढ़ा, उनमें गुण्यक (Multiplicand) और गुणक (Multiplier), लिए गये आधार के काफी निकट थे, अर्थात् आधार व दी गई संख्या का अन्तर बहुत कम था और उस अन्तर का गुणा करना बहुत आसान था (पुष्प 1–अध्याय 5), लेकिन जब हमें दो ऐसी संख्याओं को गुणा करना पड़ता है जो कि हमारे द्वारा लिए गए आधार से काफी दूर होती हैं, तब हमें थोड़ी कठिनाई होती है। इस प्रकार की संख्याओं के गुणा करने के लिए एक उपसूत्र "अनुरूप्येण" का प्रयोग किया जाता है। इस उपसूत्र का अर्थ है "अनुपात से" अर्थात जिन प्रश्नों में एक प्रकार का अनुपातिक सम्बन्ध होता (Rational relationship) है, उसमें उस अनुपात का प्रयोग करना चाहिए। इस अनुपात से आवश्यकतानुसार गुणा या भाग करना पड़ेगा (पुष्प–1, अध्याय–6)।

6·2 उदाहरण 1 : 47×47

6·2·1 प्रथम विधि : आधार — 100

उपआधार — 50

अपवर्तक — $\frac{1}{2}$ (क्योंकि $100 \times \frac{1}{2} = 50$)

47 — 03

47 — 03

———

44 / 09 $(47 - 03 = 44)$

बायां पक्ष = अपवर्तक × 44

$= \frac{1}{2} \times 44 = 22$

इस प्रकार उत्तर = **2209**

(यहां हमने आधार 100 लिया है तो दायें पक्ष में दो अंकों का होना आवश्यक है, इसलिए 9 के आगे शून्य लिखा है।)

6·2·2 द्वितीय विधि : आधार — 10

उपआधार — 50($5 \times 10 = 50$)

47 — 3 बायाँ पक्ष = अपवर्तक × 44

47 — 3 = 5×44

———— = 220

5×44 / 9

उत्तर = 220/4 = **2204**

नोट : (यहाँ हमने आधार 10 लिया है इसलिए दांये पक्ष **में** एक ही अंक है।)

6·2·3 तृतीय विधि : आधार — 10

उपआधार — 40

अपवर्तक — 4 (क्योंकि $4 \times 10 = 40$)

47 + 7

47 + 7

————

54 / 49

यहां पर हमने आधार 10 लिया है इसलिए दांए पक्ष में केवल एक ही अंक लिखा जाएगा व प्रथम अंक को बांए पक्ष में जोड़ दिया जाएगा, **लेकिन जोड़ा तभी जाएगा जब हम अन्तिम चरण पर पहुँचेंगे**। इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि बांए पक्ष का स्थानान्तरण हम अनुरूप्येण सूत्र का प्रयोग करने के बाद ही करेंगे।

बायां पक्ष = अपवर्तक × 54

$= 4 \times 54 = 216$

47 + 7

47 + 7

————

216_4 / 9 $= (216 + 4)/9 =$ **2209**

टिप्पणी : (1) प्रत्येक विधि से "अनुरूप्येण" सूत्र का अर्थ स्पष्ट होता है।

(2) हमने देखा कि उपरोक्त किसी भी रीति से गुणा करने पर उत्तर वही आता है, यह वैदिक गणित का विशेष गुण है। नए छात्र इस प्रकार एक विधि द्वारा प्रश्न हल करके, दूसरी विधि द्वारा उसके उत्तर की जाँच कर सकते हैं।

6·3 उदाहरण 2 : 252×254

आधार — 1000

उपआधार — 250

अपवर्तक — $\frac{1}{4}$ $(1000 \times \frac{1}{4} = 250)$

$$\begin{array}{l} 252 + 002 \\ 254 + 004 \\ \hline \frac{1}{4} \times 256/008 \end{array}$$

$= 64/008 = 64008$

6·4 उदाहरण 3 : $42 \times 43 = ?$

6·4·1 प्रथम विधि : आधार — 100

उपआधार — 50

अपवर्तक — $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l} 42 - 08 \\ 43 - 07 \\ \hline \frac{1}{2} \times 35/56 \end{array}$$

$= 17\frac{1}{2}/56$

हम देखते हैं कि बांए पक्ष में 35 आता है जो कि एक विषम संख्या है, इसे 2 से भाग देने पर $17\frac{1}{2}$ आता है, जैसे $\frac{1}{2}$ रुपये का अर्थ होता है 50 पैसे, उसी प्रकार यहाँ आधार का $\frac{1}{2}$ होगा अर्थात $(\frac{1}{2} \times 100)$ 50, और इस संख्या को दांए पक्ष में जोड़ देंगे,

$$\begin{array}{l} 42 - 08 \\ 43 - 07 \\ \hline 17/56 + 50 \quad = 17/106 \end{array}$$

यहाँ पर हमने आधार 100 लिया है इसलिए दांए पक्ष में केवल दो अंक ही लिखेंगे और अतिरिक्त अंक 1 को बांए पक्ष में जोड़ देंगे—

$$\begin{array}{l} 42 - 08 \\ 43 - 07 \\ \hline 17 / 106 \quad = \mathbf{1806} \end{array}$$

6·4·2 दूसरी विधि : आधार — 10

उपआधार — 50

अपवर्तक — 5

$$\begin{array}{l} 42 - 8 \\ 43 - 7 \\ \hline 5 \times 35/56 \end{array}$$

$= 175/56 = 1806$

टिप्पणी : 1. दूसरी विधि के द्वारा उत्तर जल्दी आता है, इसलिए गति के लिये सही आधार व उपआधार चुनना आवश्यक है।

2. यदि हम देखें कि दो संख्याओं का अन्तर विषम है तो आधार ऐसा चुनेंगे, कि जिसके उपआधार का अपवर्तक पूर्ण अंक हो, इससे प्रश्न हल करने में आसानी रहेगी।

तीसरी विधि : आधार — 10
उपआधार — 40
अपवर्तक — 4

42 + 2
43 + 3
———
45 / 6
×4
=180/6 = 1806

टिप्पणी : यदि हम संख्याओं के निकट का उपआधार लेंगे तो बड़ी संख्याओं को गुणा नहीं करना पड़ेगा।

6·5 उदाहरण 4 : 231 × 232 =
आधार — 1000
उपआधार — 250
अपवर्तक — $\frac{1}{4}$

231 — 019
232 — 018
———
$\frac{1}{4}$ × 213/342

=53$\frac{1}{4}$/342
= 53/250 + 342 = 53/592 = 53592

19 × 18
आधार — 10, 19 + 9
18 + 8
———
27 / 7^2
= 34/2 = 342

टिप्पणी : हम देखते हैं कि सूत्र "अनुरूप्येण" का प्रयोग करने से कई बार बहुत अधिक कार्य करना पड़ता है। इस प्रकार के प्रश्नों को सरलता से ऊर्ध्व सूत्र के द्वारा हल किया जा सकता है। (पुष्प 1 अध्याय–10)

6·6 उदाहरण 5 : 389 × 512 =
आधार — 1000
उपआधार — 500
अपवर्त्य — $\frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
&389 - 111 \\
&512 + 012 \\
\hline
&401 \\
&\times \tfrac{1}{2} \;/\; \overline{1}3\overline{3}\overline{2} \\
&= 200\tfrac{1}{2} \;/\; \overline{1}3\overline{3}\overline{2} \\
&= 200 \;/\; 500 - 1332 \\
&= 200 \;/\; \overline{8}\overline{3}\overline{2} \\
&= 199 \;/\; 1000 - 832 \\
&= \mathbf{199 \;/\; 168} = 199168
\end{aligned}
$$

अभ्यास :

प्रश्न 1. नीचे दिए गए प्रश्नों को विभिन्न आधार एवं उपाधार के संयोगों से गुणा करें। हर प्रश्न के सबसे उपयुक्त आधार या उपाधार को बताएँ—

79 × 75	93 × 49	54 × 64
74 × 42	4970 × 4970	257 × 253
154 × 194	187 × 534	4999 × 4798

प्रश्न 2. गुणा करें—

31 × 33	50001 × 10749	38 × 66
596 × 498	989 × 986	43 × 59
1003 × 998	253 × 242	42 × 56
17 × 16	43 × 41	692 × 608
889 × 811		

प्रश्न 3. सभी प्रश्नों के उत्तर की वैदिक विधि से जांच करें।

अध्याय-7

निखिलं उपप्रमेय

7·1 परिचय : पिछले अध्याय में दिये गये प्रश्नों का हल 'निखिलम्' सूत्र द्वारा निकाला था।

निखिलम् सूत्र जिसका प्रयोग पिछले अध्यायों में किया गया है उसके अनेक उपप्रमेय (Corollaries) हैं। कुछ उप्रमेय पुष्प 1 (अध्याय 9) में हमने देखे थे।

7·2 उपप्रमेय 1 : पुष्प 1 में द्वितीय उपप्रमेय 'एकाधिकेनपूर्वेण' सूत्र का प्रयोग उप-सूत्र के रूप में किया गया है। यह सूत्र उन संख्याओं के वर्ग निकालने में प्रयोग किया जाता है जिनका अन्तिम अंक 5 है। इस सूत्र का अर्थ है **'पिछले से एक अधिक द्वारा'**।

7·2·1 उदाहरण 1 : 35 का वर्ग ज्ञात करो—

यहाँ पर 5 से पहली संख्या 3 है, इस सूत्र के अनुसार हम पहली संख्या अर्थात् 3 को, पहले से एक अधिक अर्थात् $3+1=4$, से गुणा करते हैं। यह उत्तर का बायां पक्ष है। दायां पक्ष तो 5 की ऊर्ध्व गुणा है।

$$35^2 = 3 \times 4/5 \times 5$$
$$= 12/25 = 1225$$

7·2·2 उदाहरण 2 : इसी प्रकार

$$95^2 = 9 \times 10/25 = 90/25 = 9025$$
$$115^2 = 11 \times 12/25 = 132/25 = 13225$$

7·3 उपसूत्र : इस सूत्र का उपप्रमेय एक और उपसूत्र है 'अन्त्ययोर्दशकेऽपि'। इस सूत्र के अनुसार उपर्युक्त नियम उन दो संख्याओं की गुणा में प्रयोग किया जा सकता है जिनका पहला भाग एक ही है अर्थात् समान अंक है तथा बाद के अंकों का योग 10 है (व 100 है)।

7·3·1 उदाहरण 3 : $34 \times 36 = ?$

इन दोनों संख्याओं का पहला अंक 3 है और बाद के दो अंकों का जोड़ 10 (4+6=10) है। इसलिये हम यहाँ सूत्र 'अन्त्ययोर्दशकेऽपि' का प्रयोग कर सकते हैं।

प्रथम चरण : बायां पक्ष प्राप्त करने के लिये पहली संख्या को एक से बढ़ाकर, उसे उसी संख्या से गुणा करते हैं।

$3+1=4,$

$3 \times 4=12$ (बायां पक्ष)

द्वितीय चरण : दायाँ पक्ष ऊर्ध्वाधरण (Vertical) गुणा करके प्राप्त करते हैं।

$4 \times 6=24$ (दायां पक्ष)

तृतीय चरण : $34 \times 36=$ **1224**

7·3·2 उदाहरण 4 : कुछ और उदाहरण इस प्रकार हैं—

$86 \times 84 = 8 \times 9/6 \times 4 = 72/24 = 7224$

$87 \times 83 = 8 \times 9/7 \times 3 = 72/21 = 7221$

$73 \times 77 = 7 \times 8/3 \times 7 = 56/21 = 5621$

$64 \times 66 = 6 \times 7/4 \times 6 = 42/24 = 4224$

$104 \times 106=10 \times 11/4 \times 6=110/24 =11024$

$113 \times 117=12 \times 11/3 \times 7=132/21 =13221$

7·3 3 इसी प्रकार ऐसे उदाहरण जिनमें बाद की संख्याओं का योग 100, 1000 हो उपरोक्त विधि से हल किये जा सकते हैं।

$193 \times 107 = 1 \times 2/93 \times 7 = 2/0651 = 20651$

$693 \times 607 = 6 \times 7/63 \times 7 =42/0651 =420651$

$888 \times 812 = 8 \times 9/88 \times 12=72/088+78$

$$\begin{array}{r} 12+2 \\ \hline 090/{}_{15}6 \end{array}$$

$=72/0_{1}056 = 721056$

(यहाँ पर दांये पक्ष में एक अतिरिक्त शून्य बढ़ाया गया है क्योंकि जोड़ 100 में 2 शून्य है, दायें पक्ष में 4 अंक होंगे।)

7·4 तृतीय उपप्रमेय : खगोल विज्ञान में हमें कई बार बड़ी संख्याओं को ऐसी संख्या से गुणा करना पड़ता है जिसके सब अंक 9 होते हैं। इस प्रकार की गुणा में हम उपसूत्र 'एकन्यूनेन पूर्वेण' (Ekanyunena Purvena) (क्रमांक 14) का प्रयोग करते हैं।

7·4·1 उदाहरण 5 : $6 \times 9 = ?$

इस सूत्र के अनुसार गुण्यक (multiplicand) को एक अंक कम कर देते हैं, इस प्रकार प्राप्त संख्या बायें पक्ष में लिखी जायेगी। उत्तर का दायां पक्ष प्राप्त करने के लिये दांये पक्ष की संख्या में से प्राप्त बांये पक्ष की संख्या क्रम से घटाते हैं।

$$\therefore\ 6 \times 9 = (6-1)/9-(6-1) = 5/4 = 54$$

7·4·2 उदाहरण 6 :

(i) $13 \times 99 = 13-1/99-12 = 12/87 = 1287$

(ii) $778 \times 999 = 777/222 = 777222$

(iii) $9863 \times 9999 = 9862/0137 = 98620137$

टिप्पणी : दांये पक्ष का उत्तर प्राप्त करने के लिये गुणक में से बांये पक्ष को घटाते समय सभी अंकों को शून्य सहित लिखना चाहिये।

$$(9999-9862=0137)$$

(iv) $3728387 \times 9999999 = 3728386/6271613$

7·4·3 : यदि गुणयक के अंकों की संख्या, गुणक के अंकों की संख्या से कम है तो भी 'एकन्यूनेन पूर्वेण' सूत्र का प्रयोग किया जाता है। परन्तु घटाते समय बांये पक्ष में आवश्यकतानुसार शून्य लिखना आवश्यक है।

7·4·4 उदाहरण 7 :

(i) $8 \times 99 = 08 \times 99 = 07/99-07 = \mathbf{792}$

(ii) $67 \times 999 = 067 \times 999 = 066/933 = 66933$

(iii) $737 \times 99999 = 00737 \times 99999 = 73699263$

(iv) $83 \times 9999999 = 0000083 \times 9999999 = 829999917$

7·4·5 : यदि गुणक में 9 अंकों की संख्या कम हो तो भी उपर्युक्त विधि से प्रश्न हल कर सकते हैं।

7·4·6 उदाहरण 8 :

(i) $17 \times 9 = 16/9-16 = 16/\bar{7} = 15/3$
$= 153$

(ii) $163 \times 9 = 162/9-162 = 162/_{\bar{1}}\bar{5}\bar{3} = 162-15/\bar{3}$
$= 147/\bar{3}$
$= 146/10-3$
$= \mathbf{1467}$

टिप्पणी : इस उदाहरण में दांये पक्ष में विनकुलम् (Vinculum) से प्रश्न हल किया गया है ।

7 4·7 : गुणक में 9 अंकों की कम संख्या के प्रश्नों को निम्नविधि द्वारा और भी सरलता से हल कर सकते हैं ।

उदाहरण 9 : 778×99

(i) उत्तर का बायां पक्ष दी गई पूर्व संख्या से एक कम होता है

$778 - 1/777/$

(ii) दांये पक्ष के अंक प्राप्त बांये पक्ष के अंकों के 9 से पूर्व अंक होगें (इन अंकों की संख्या गुणक के 9 अंकों के समान होगी) ।

यहाँ $9-7=2;\ 9-7=2$ $\quad 777/_{\bar{7}}22$

(iii) और गुणयक के शेष अंकों को विनकुलम् रूप में लिखकर बांये पक्ष में जोड़ देते हैं ।

$=777+\bar{7}/22$

$=770/22$

$=\mathbf{77022}$

7·4·8 उदाहरण 10 :

(i) 652×99

$=651/_{\bar{6}}48$

$=651+\bar{6}/48$

$=64548$

(ii) 3687×999

$=3686/_{\bar{3}}313$

$=3686+\bar{3}/313$

$=\mathbf{3683313}$

(iii) $257642 \times 9999 = 257641/_{\bar{2}\bar{5}}2358$

$=257641+\bar{2}\bar{5}/2358$

$=\mathbf{2576162358}$ **उत्तर**

गुणन–तीन अथवा अधिक संख्याओं का :

7·5 परिचय : तीन, अथवा तीन से अधिक संख्याओं को एक साथ गुणा करने के लिये भी वैदिक गणित की विधि को अपनाया जा सकता है । यह विधि बड़ी संख्याओं के लिये अवश्य कुछ लम्बी हो जायेगी । यह भी 'निखिलम् नवतश्चरमं दशतः' का एक विशेष एवं अद्वितीय संयोग है । आगे हल किये गये कुछ उदाहरणों से यह विधि पूर्णतया स्पष्ट हो जायेगी ।

जैसा कि हम जानते हैं 'निखिलम्' सूत्र का अर्थ है, "सभी को 9 से तथा अन्तिम को 10 से"।

प्रथम प्रकार :

7·5·1 उदाहरण 11 : हमें $98 \times 97 \times 96$ का गुणा करना है।

प्रथम पद : हम इन संख्याओं को वैदिक आधार पद्धति के अनुसार लिखते हैं। हम 'निखिलम्' सूत्र से प्रत्येक संख्या के आधार से विचलन को ज्ञात करते हैं। अत:

(आधार 100 लिया गया है)

98 — 02
97 — 03
96 — 04
————
/ /

द्वितीय पद : तीन संख्याओं के गुणन के उत्तर में भी तीन भाग होंगे। इसलिये दो तिर्यक रेखायें खींची गयी हैं, जो तीनों भागों को अलग-अलग प्रदर्शित करेंगी।

तृतीय पद : हम तीनों विचलनों को आपस में गुणा करते हैं और गुणनफल को दायीं ओर के भाग में लिख देते हैं। इस उदाहरण में $(-02) \times (-03) \times (-04) = -24 = \overline{24}$, $\overline{24}$ ही दांये भाग का उत्तर है। इसे दायीं ओर वाले भाग में लिखते हैं।

चतुर्थ पद : बीच वाले भाग निम्न विधि से प्राप्त कर सकते हैं। हम दो विचलनों को (एक समय में) क्रम से गुणा करते हैं। इन तीन गुणनफलों का योग मध्य भाग होता है और इसे उत्तर के मध्य वाले भाग में लिखते हैं।

इस उदाहरण में,

$$(-02 \times -03) + (-03 \times -04) + (-04 \times -02)$$
$$= 6 + 12 + 8 = 26$$

98 — 02
97 — 03
96 — 04
————
/ 26 / $\overline{24}$

पंचम पद : उत्तर का बायां पक्ष प्रथम संख्या एवं शेष दोनों संख्याओं के विचलनों के बीजगणितीय योगफल से प्राप्त करते हैं।

इस उदाहरण में $98 + (-03) + (-04) = 91$

इस संख्या को सबसे बायीं ओर के रिक्त स्थान में लिखते हैं।

98 — 02
97 — 03
96 — 04

91/26/$\overline{24}$

टिप्पणी : गुणनफल का बायां पक्ष अन्य कई विधियों से भी ज्ञात किया जा सकता है, जो कि वैदिक गणित की एक अनोखी विशेषता है। प्रत्येक विधि सरल जाँच के लिये भी प्रयुक्त की जा सकती है। जैसे—

(i) द्वितीय संख्या को शेष दोनों संख्याओं के विचलनों में जोड़ने पर बायीं ओर वाला भाग प्राप्त किया जा सकता है।
इस उदाहरण में $97+(-02)+(-04)=91$

(ii) बायां पक्ष तीसरी संख्या एवं शेष दो संख्याओं के विचलनों के योग से भी प्राप्त कर सकते हैं।
इस उदाहरण में $96+(-02)+(-03)=91$

(iii) बायां पक्ष तीनों विचलनों एवं आधार के बीजगणितीय योगफल से भी प्राप्त किया जा सकता है।
$$(100+(-02)+(-03)+(-04)=91$$

(iv) इसी उत्तर को, तीनों संख्याओं के योगफल में से आधार के दुगने को घटाने पर भी प्राप्त कर सकते हैं।
$$98+97+96-(2)\ (100)=91$$

विवेचना : ऊपर दी गयी 5 विभिन्न विधियों में से किसी को भी बायीं ओर वाला भाग प्राप्त करने के लिये प्रयोग किया जा सकता है, और उस उत्तर की जांच के लिये पुनः अन्य किसी भी विधि को अपनाया जा सकता है।

षष्ठम् पद : अतः सरल मानसिक गणनाओं के द्वारा एक ही पंक्ति में प्राप्त उत्तर $9126\overline{24}$ है।

उत्तर हमें विनकुलम् रूप में प्राप्त होता है, तो उसे सामान्य बनाने पर हम पूरा उत्तर धनात्मक रूप में प्राप्त कर सकते हैं। यहाँ पर यह स्मरण रहे कि 'निखिलम्' सूत्र का उपयोग पुनः सामान्य करने में किया जाता है।

अतः $9126\overline{24}=912576$

प्रेक्षण : जैसा कि पहले भी स्पष्ट किया गया है कि तृतीय एवं चतुर्थ पद में प्राप्त उत्तर केवल दो अंकों में है। क्योंकि आधार में, (इस उदाहरण में 100) केवल 2 शून्य हैं इसलिये तृतीय एवं चतुर्थ पद के उत्तर दो ही अंक में होंगे।

7·5·2 उदाहरण 12 :

$$\begin{array}{l} 988 - 012 \\ 996 - 004 \\ 995 - 005 \\ \hline 979/128/\overline{240} \\ \hline \end{array}$$

$=979127760$

दायीं ओर का पद $=(-012)\times(-004)\times(-005)$

$=\overline{240}$

मध्य पद $=(-012)\times(-004)+(-004)(-005)$

$+(-005)\,(-012)$

$=48+20+60=128$

बायां पक्ष $=988-004-005$

$=979$ आदि ।

7·5·3 द्वितीय प्रकार : उन संख्याओं के गुणन में, जिनका आधार से विचलन अधिक हो, तृतीय व चतुर्थ पद के अनुसार गुणनफल के अंक यदि आधार के शून्यों से अधिक हो तो अधिक अंकों को दूसरे भाग में स्थानान्तरित कर दिया जाता है । निम्नलिखित उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा ।

उदाहरण 13 : $88\times96\times95$

$$\begin{array}{l} 88 - 12 \\ 96 - \ \ 4 \\ 95 - \ \ 5 \\ \hline \end{array}$$

$79/_{1}28/_{2}\overline{40} \quad =79_{1}/28_{2}/\overline{40}=8026\overline{4}0=802560$

उदाहरण 14 : $85\times94\times97$

$$\begin{array}{l} 85 - 15 \\ 94 - \ \ 6 \\ 97 - \ \ 3 \\ \hline \end{array}$$

$76/_{1}53/_{2}\overline{70} \quad = \quad 76_{1}/53_{2}/\overline{70} \quad = \quad 7751\overline{7}0=775030$

7·5·4 तृतीय प्रकार : पिछले दो प्रकार के उदाहरणों से यह पूर्णतया स्पष्ट हो गया है, कि दायीं ओर एवं मध्य भाग के अंक आधार में उपस्थित शून्यों के बराबर होने चाहिये। यदि अधिक हैं तो उस अंक को उच्च स्थिति में स्थानान्तरित कर दिया जाता है। यदि विचलनों के गुणनफल, जैसा कि तृतीय एवं चतुर्थ पद में प्राप्त किया जाता है, में अंक आधार में उपस्थित शून्यों से कम हो तो हम 1 अथवा अधिक शून्यों को इन भागों के उत्तर से पहले रख देते हैं। निम्नलिखित उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 15 : $997 \times 996 \times 995$

997 — 003
996 — 004
995 — 005

$988/047/0\overline{60} = 988046940$

दायीं ओर वाले भाग में $(-3) \times (-4) \times (-5) = -60$ में केवल 2 अंक हैं। अतः इस भाग का उत्तर प्राप्त करने के लिये -60 से पहले एक शून्य लगाते हैं (क्योंकि आधार 1000 में तीन शून्य हैं)।

इसी प्रकार मध्य भाग

$$= (-3) \times (-4) + (-4) \times (-5) + (-5) \times (-3)$$
$$= 47$$

इसमें भी केवल दो ही अंक हैं अतः इससे पूर्व भी एक शून्य लगाना आवश्यक है। मध्य भाग $= 047$

7·5 5 चतुर्थ प्रकार : ऊपर दर्शाये गये तीनों प्रकार के उदाहरणों में गुणा की जाने वाली संख्यायें आधार से छोटी थी और विचलन ऋणात्मक चिन्ह के साथ प्राप्त होते थे। आधार से बड़ी संख्याओं के लिये क्या होना चाहिये ? ऊपर दर्शायी गई निखिलं विधि को यहाँ भी अच्छी प्रकार से प्रयुक्त किया जा सकता है। केवल अन्तर यह है कि यहाँ पर सभी विचलन धनात्मक चिन्ह के साथ प्राप्त होंगे और उनसे सम्बन्धित गुणनफल और योगफल भी धनात्मक होंगे। यहाँ पर यह भी स्मरणीय है कि विभिन्न भागों में प्राप्त होने वाले उत्तरों में अंकों की कमी अथवा अधिकता वाले नियम उसी प्रकार होंगे। आगे दिये गये कुछ उदाहरण इसे अच्छी प्रकार से स्पष्ट कर देंगे।

उदाहरण 16 : $1002 \times 1012 \times 1003$

$$\begin{array}{r} 1002 + 002 \\ 1012 + 012 \\ 1003 + 003 \\ \hline 1017/066/072 = 1017066072 \end{array}$$

7 5·6 पंचम प्रकार : यदि कुछ संख्याऐं आधार से बड़ी हों और शेष संख्याऐं आधार से छोटी हों तो गुणा की विधि विभिन्न पदों में उसी प्रकार रहेगी जैसा कि पहले समझाया गया है। केवल एक बात ध्यान रखने की है कि विचलनों की गुणा को उचित चिन्ह के साथ किया जाना चाहिये। यदि संख्याऐं आधार से अधिक हैं तो विचलन धनात्मक होता है और यदि आधार से कम है तो विचलन ऋणात्मक होता है। नीचे हल किये गये उदाहरण से यह स्वतः ही स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 17 : $1012 \times 997 \times 1006 =$

$$\begin{array}{r} 1012 + 012 \\ 997 - 003 \\ 1006 + 006 \\ \hline 1015/018/\overline{2}\overline{1}\overline{6} = 1015017784 \end{array}$$

7·6 चार संख्याओं का गुणन :

पिछले खण्डों के विभिन्न पदों की निखिलं विधि को चार संख्याओं तक भी बढ़ाया जा सकता है, यहाँ तक कि पाँच संख्याओं के गुणन के लिये भी प्रयुक्त कर सकते हैं।

प्रथम पद : चार संख्याओं के गुणन के लिये उत्तर चार भागों में प्राप्त होगा। अतः तीन तिर्यक रेखायें खींची जाती हैं।

द्वितीय पद : दायीं ओर वाला भाग चारों विचलनों के गुणन से प्राप्त किया जा सकता है।

तृतीय पद : मध्य दांये भाग को चार गुणनफलों, जो तीन विचलन एक समय में लेने पर प्राप्त होता है, के योगफल से प्राप्त कर सकते हैं।

चतुर्थ पद : मध्य बांये भाग को छः गुणनफलों, जो दो विचलनों को एक समय में लेने पर प्राप्त होते हैं, के योगफल से प्राप्त कर सकते हैं।

पंचम पद : बांये भाग को पहले की तरह से किसी एक संख्या एवं शेष तीनों संख्याओं के विचलनों के योगफल से प्राप्त कर सकते हैं। उचित चिन्ह का उपयोग करते हैं।

उदाहरण 18 :

$$\begin{array}{r} 998 - 002 \\ 996 - 004 \\ 995 - 005 \\ 1004 + 004 \\ \hline 993/00\bar{6}/112/\bar{1}\bar{6}\bar{0} \end{array}$$

$=$ **992994111840**

दायां भाग $=(-2)\times(-4)\times(-5)\times(4)=-160$

मध्य दायां भाग $=(-2\times-4\times-5)+(-4\times-5\times4)$

$(-5\times4\times-2)+(-2\times-4\times4)$

$=-40+80+40+32=112$

मध्य बायां भाग $=(-2\times-4)+(-4\times-5)$

$+(-5\times4)+(4\times-2)$

$+(-4\times4)+(-5\times-2)$

$=8+20-20-8-16+10$

$=-6$

बायां भाग $=998+(-4-5+4)$

$=998-5=993$

साधारण गणक इसे करने में असमर्थ होगा।

7·7 पाँच संख्याओं का गुणन :

हम पहले ही वैदिक गणित की आश्चर्यजनक गति वाली उन संख्याओं, जो कि आधार के बहुत पास है, के गुणन से अवगत हो चुके हैं। 'निखिलम्' सूत्र को बहुत सरलता के साथ चार अथवा पाँच संख्याओं के गुणन में भी प्रयुक्त कर सकते हैं। यह सम्पूर्ण कार्य मात्र मानसिक क्रिया से सम्पन्न किया जा सकता है, और उत्तर को केवल दो ही पंक्तियों में प्राप्त कर सकते हैं। उत्तर की पहली अवस्था में हम कुछ विनकुलम् भाग भी प्राप्त कर सकते हैं। जिसे पुन: निखिलम् सूत्र की सहायता से सामान्य रूप में परिवर्तित कर सकते हैं। यद्यपि इस कार्य में कुछ मानसिक क्रिया की आवश्यकता है परन्तु एकाग्रचित मन से कार्य करने में कोई कठिनाई नहीं होगी।

पिछले खण्ड में दी गयी विभिन्न पदों वाली विधि को अत्यन्त सरलता के साथ पाँच संख्याओं में भी प्रयुक्त कर सकते हैं। पुन: समस्त कार्य मानसिक रूप से और केवल दो पंक्तियों में किया जा सकता है। अधिक अंकों वाली संख्या के कुछ अंकों को स्थानान्तरित एवं कमी वाली संख्याओं से पहले शून्य सम्बन्धी नियमों को अन्तिम उत्तर के लिये प्रयोग किये जायेंगे। अन्य उदाहरणों का विस्तार पत्राचार पाठ्यक्रम में दिया गया है।

अभ्यास :

निम्नलिखित प्रश्न हल करो । प्रत्येक प्रश्न में प्रयोग सूत्र व उपसूत्र का भी उल्लेख करो —

प्रश्न 1. 35×35, 55×55, 75×75, 105×105
125×125, 165×165

प्रश्न 2. 43×47, 62×68, 81×89, 74×76
91×99, 103×107, 112×118, 111×119
104×106, 191×109, 194×106, 692×608
889×813, 893×807, 897×803

प्रश्न 3. 17×99, 56×99, 568×99, 414×9999
511×99, 717×99, 8767×999, 49367×9999
58437×9999, 999×9999, 63×999, 767×99999

प्रश्न 4. निम्न तीन संख्याओं को निखिलम् विधि से गुणा करो—

(i) $8 \times 7 \times 6$ (ii) $97 \times 95 \times 99$
(iii) $93 \times 95 \times 98$ (iv) $995 \times 997 \times 999$
(v) $1003 \times 1015 \times 1005$ (vi) $996 \times 989 \times 1005$
(vii) $92 \times 95 \times 111$

प्रश्न 5. निम्न चार संख्याओं को गुणा करो—

(i) $13 \times 12 \times 9 \times 8$
(ii) $97 \times 95 \times 103 \times 105$
(iii) $9997 \times 9995 \times 9989 \times 10005$

वैदिक विधि से उत्तर की जाँच करें ।

अध्याय-8

विनकुलम् के प्रयोग से गुणन एवं जाँच

8·1 भूमिका : पुष्प 1 के दसवें अध्याय में ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र के प्रयोग द्वारा गुणन की सामान्य विधि को दर्शाया गया है। इस सरल एवं सशक्त सूत्र के अनेकों प्रयोग हैं। इसका अर्थ है ऊर्ध्वाधर एवं तिर्यक। इस सूत्र के प्रयोग से हम केवल विभिन्न स्तम्भों का सरलीकरण करते हैं। प्रत्येक चरण में पहले ऊर्ध्व व तिर्यक गुणन होता है फिर उपलब्ध गुणनफलों का योग किया जाता है। यदि अंक बड़े होते हैं तो गुणनफल एवं योगफल भी बड़े व कठिन हो जाते हैं। इस क्रिया को सरल बनाने के लिये संख्याओं को विनकुलम् रूप में लिखते हैं एवं गुणन के लिये बीजगणित के सरल नियमों का ही प्रयोग किया जाता है। (कृपया पुष्प-2 का विनकुलम् क्रियाओं का अध्याय 1 देखें)

8·2 विधि : इस विधि के विभिन्न चरण पहले ही विस्तार से बताये जा चुके हैं। (अध्याय 10 पुष्प 1) उन्हीं चरणों का प्रयोग विनकुलम् गुणन में भी होता है। निम्न-लिखित उदाहरणों से विधि स्पष्ट हो जायेगी।

8·2·1 उदाहरण 1 :

79 को 68 से गुणा करो

2	1	
.	.	उ
.	.	न
7	9	
6	8	
	7^2	

चरण 1 : प्रथम स्तम्भ को सरल करने पर हम ऊर्ध्व गुणा करते हैं।

प्रथम उत्तर$=$उ1 $\times$ न1 $= 8 \times 9 = 72$

प्रथम उत्तर$= 72$

इसमें दो अंक होने के कारण इकाई अंक को प्रथम स्तम्भ के लिये एवं दहाई अंक द्वितीय स्तम्भ में कुछ नीचे रखते हैं, क्योंकि यह स्थानान्तरित होगा।

चरण 2 : प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भों को सरल करने पर उत्तर का द्वितीय भाग प्राप्त होगा। यहाँ तिर्यक गुणा करते हैं।

भाग 2 = उ1 × न2 + उ2 × न1
= 9 × 6 + 7 × 8 = 54 + 56
= 110

पुन: 0 को द्वितीय स्तम्भ में एवं 11 को उच्च मान वाले स्तम्भ में नीचे की ओर रखते हैं।

```
  7   9
  6   8
———————
     02
 1 1 7
```

इस प्रकार प्रथम स्तम्भ की क्रियायें समाप्त हो जाती हैं।

चरण 3 : प्रथम स्तम्भ को सभी स्तम्भों से गुणन करने के पश्चात् एक-एक स्तम्भ कम करते जाते हैं, व शेष स्तम्भों का सरलीकरण करते हैं।

प्रथम स्तम्भ का विलोप करने पर, हमें केवल द्वितीय स्तम्भ ही प्राप्त होता है जिसे ऊर्ध्व गुणा करते हैं। अत: तृतीय भाग = 7 × 6 = 42, इस मान को तृतीय स्तम्भ में रखते हैं व अब जोड़ देते हैं।

```
  7   9
  6   8
———————
4 2 0 2
1 1 7
———————
5 3 7 2
```

यदि संख्याओं को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करके गुणा करते हैं।

(अध्याय 1 देखें)

$79 = 12\bar{1}$ एवं $68 = 13\bar{2}$

3 2 1 (स्तम्भ क्र.)
$1\ \bar{2}\ \bar{1}$ उ
$1\ \bar{3}\ \bar{2}$ न
———
3/7/2
———

प्रथम भाग = $उ_1 \times न_1 = \bar{1} \times \bar{2} = 2$

द्वितीय भाग = $उ_1 \times न_2 + उ_2 \times न_1$
$= \bar{1} \times \bar{3} + \bar{2} \times \bar{2}$
$= 3 + 4 = 7$

तृतीय भाग $= उ_1 \times न_3 + उ_3 \times न_1 + उ_2 \times न_2$
$= \bar{1} \times 1 + 1 \times \bar{2} + \bar{2} \times \bar{3}$
$= \bar{1} + \bar{2} + 6 = 3$

इस प्रकार प्रथम स्तम्भ की समस्त क्रियायें समाप्त हो जाती हैं। अब प्रथम स्तम्भ का विलोप करते हुए अन्य 2 स्तम्भों को तिर्यक गुणा द्वारा सरल करते हैं।

अतः भाग 4 $= उ_2 \times न_3 + उ_3 \times न_2$
$= \bar{2} \times 1 + 1 \times \bar{3}$
$= \bar{2} + \bar{3} = \bar{5}$

पुनः द्वितीय स्तम्भ का विलोप करने पर शेष स्तम्भ 3 को ऊर्ध्व गुणा करते हैं।

भाग 5 $= उ_3 \times न_3 = 1 \times 1 = 1$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \bar{2} & \bar{1} \\ 1 & \bar{3} & \bar{2} \end{array}$$

$1/\bar{5}/3/7/2 \quad = 1\bar{5}372$
$= 5372$

प्रतीकों में व्यक्त करने पर

भाग 1 $= \begin{matrix} 1 & \bar{2} \\ 1 & \bar{3} \end{matrix} \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$; भाग 2 $= \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix}$

भाग 3 $= \begin{bmatrix} 1 & \bar{2} & \bar{1} \\ 1 & \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix}$; भाग 4 $= \begin{bmatrix} 1 & \bar{2} \\ 1 & \bar{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{matrix}$

भाग 5 $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} \end{matrix}$

प्रत्येक भाग के लिये कोष्ठक में अंकित स्तम्भों को सरल किया जाता है।

टिप्पणी : 1. उदाहरण द्वारा स्पष्ट है कि विनकुलम् रीति से समस्त अंकगणितीय कार्य बहुत आसानी से हो जाता है।
2. इस समस्त कार्य को कुछ अभ्यास के पश्चात् मानसिक गणनाओं से किया जा सकता है।

8·2·2 उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 2\,8\,7\,8 \\ \times 2\,7\,9\,8 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 3\,\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{2} \\ 3\,\bar{2}\,0\,\bar{2} \\ \hline 9/\bar{9}/\bar{4}/\bar{8}/6/4/4 \end{array}$$

उत्तर $= 8052644$

भाग $1 = \bar{2} \times \bar{2} = 4$

भाग $2 = \bar{2} \times 0 + \bar{2} \times \bar{2} = 4$

भाग $3 = \bar{2} \times \bar{2} + \bar{1} \times \bar{2} + \bar{2} \times 0 = 6$

भाग $4 = \bar{2} \times 3 + 3 \times \bar{2} + \bar{1} \times 0 + \bar{2} \times \bar{2} = \bar{8}$

भाग $5 = \bar{2} \times 3 + 3 \times 0 + \bar{1} \times \bar{2} = \bar{4}$

भाग $6 = \bar{1} \times 3 + 3 \times \bar{2} = \bar{9}$

भाग $7 = 3 \times 3 = 9$

समस्त क्रियायें मानसिक गणनाओं से की जा सकती हैं।

8·2·3 उदाहरण 3 :

अब 5 अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा करते हैं। पहले विनकुलम् रूप में परिवर्तित करने से कार्य में सरलता आ जाती है।

```
  2 7 8 1 9          5 4 3 2 1
×2 1 8 9 8           . . . . .  उ
----------           . . . . .  न
```

विनकुलम् रूप में लिखने पर

$$\begin{array}{r} 3\,\bar{2}\,\bar{2}\,2\,\bar{1} \\ 2\,2\,\bar{1}\,0\,\bar{2} \\ \hline \end{array}$$

$$6/2/_{\bar{1}}\bar{1}/2/\bar{2}/0/5/\bar{4}/2$$

$$= 61\bar{1}2\bar{2}05\bar{4}2 = 609180462$$

अभ्यास के बाद स्थानांतरित अंक को सीधा ही जोड़ सकते हैं।

टिप्पणी : भाग $5 = उ_1 \times न_5 \times उ_5 \times न_1 + उ_2 \times न_4 + उ_4 \times न_2 + उ_3 \times न_3$
$= \bar{2}$ इत्यादि

8·3 वैकल्पिक विधि : गुणन की क्रिया को बायीं ओर से भी आरंभ कर सकते हैं। इसमें भी ऊर्ध्व सूत्र का ही प्रयोग करेंगे। परन्तु इसमें उत्तर दो पंक्तियों में प्राप्त होगा। क्योंकि प्रारम्भ में अतिरिक्त अंकों को अलग पंक्ति में रखना आवश्यक है। निम्न उदाहरण से विधि पूर्णतया स्पष्ट हो जायेगी।

8·3·1 उदाहरण 4 ।

```
  2 7 9 2
×1 9 7 8
--------
```

या $\quad 3\ \bar{2}\ \bar{1}\ 2$ $\quad$ [विनकुलम् रूप में] $\quad$ 4 3 2 1

$\quad\ \ \times 2\ 0\ \bar{2}\ \bar{2}$ $\quad\quad$ . . . . उ

$\quad\quad$ . . . . न

$\quad 6/\bar{4}/\bar{8}/2$

बायीं ओर से उत्तर लिखने पर

भाग $1 = \text{उ}_4 \times \text{न}_4 = 3 \times 2 = 6$

भाग $2 = \text{उ}_3 \times \text{न}_4 + \text{उ}_4 \times \text{न}_3 = \bar{2} \times 2 + 3 \times 0 = \bar{4}$

भाग $3 = \text{उ}_2 \times \text{न}_4 + \text{उ}_4 \times \text{न}_2 + \text{उ}_3 \times \text{न}_3$

$= \bar{1} \times 2 + 3 \times \bar{2} + \bar{2} \times 0 = \bar{2} + \bar{6} + 0 = \bar{8}$

भाग $4 = \text{उ}_1 \times \text{न}_4 + \text{उ}_4 \times \text{न}_1 \times \text{उ}_2 \times \text{न}_3 \times \text{उ}_3 \times \text{न}_2$

$= 2 \times 2 + 3 \times \bar{2} + \bar{1} \times 0 + \bar{2} \times \bar{2} = 2$

इस प्रकार चतुर्थ स्तम्भ की शेष स्तम्भों से क्रियायें सम्पन्न हो जाती हैं। अब विलोपन करना होगा।

भाग $5 = \text{उ}_1 \times \text{न}_3 + \text{उ}_3 \times \text{न}_1 + \text{उ}_2 \times \text{न}_2$

$= 2 \times 0 + \bar{2} \times \bar{2} + \bar{1} \times \bar{2} = 6$

भाग $6 = \text{उ}_1 \times \text{न}_2 + \text{उ}_2 \times \text{न}_1$

$= 2 \times \bar{2} + \bar{2} \times \bar{1} = \bar{2}$

भाग $7 = \text{उ}_1 \times \text{न}_1 = 2 \times \bar{2} = \bar{4}$

$3\ \bar{2}\ \bar{1}\ 2$

$2\ 0\ \bar{2}\ \bar{2}$

$6/\bar{4}/\bar{8}/2/6/\bar{2}/\bar{4}$

$= 6\bar{4}\bar{8}262\bar{4}\bar{}$ $= 6\bar{4}\bar{8}26\bar{2}\bar{4} = 5522576$

8·4 गुणन की जांच : विनकुलम् रूप वाली संख्याओं की गुणन की जांच साधारण संख्याओं की जांच (पुष्प 1 अध्याय 11) के समान ही है। नीचे दिये गये उदाहरणों में इसे स्पष्ट किया गया है। केवल एक नया तथ्य विनकुलम् के परिवर्तन के लिये है, जिसे विनकुलम् संख्याओं के अध्याय में बताया जा चुका है।

8·4·1 उदाहरण 5 : $\quad 12\bar{1} \times 1\bar{3}2 = 5372$ की जांच करो।

चरण 1 : गुणक, गुणांक एवं गुणनफल को तीन पंक्तियों में लिखते हैं एवं इसके सामने एक बड़ा वर्ग खींचते हैं, वर्ग को चार समान त्रिभुजों में विभक्त करते हैं।

$$\begin{array}{r} 1\,\bar{2}\,\bar{1} \\ 1\,\bar{3}\,\bar{2} \\ \hline 5\,3\,7\,2 \\ \hline \end{array}$$

चरण 2 : प्रथम संख्या के अंकों को जोड़ते हैं यदि योगफल दो अंकों में होता है तो पुनः जोड़ने पर एक अंक प्राप्त हैं।

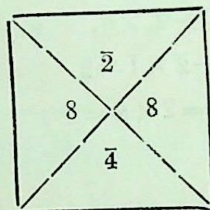
इस उदाहरण में $1+\bar{2}+\bar{1}=\bar{2}$ प्राप्त एक अंकीय संख्या को ऊपर के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 3 : द्वितीय संख्या के अंकों को भी उसी प्रकार जोड़ते हैं यदि योगफल दो अंकों में हो तो पुनः जोड़कर एक अंक में परिवर्तित करते हैं।

इस उदाहरण के लिये $1+\bar{3}+\bar{2}=\bar{4}$ प्राप्त अंक $\bar{4}$ को नीचे के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 4 : अब ऊपर एवं नीचे वाले त्रिभुजों में अंकित अंकों को गुणा करते हैं गुणनफल को पुनः 1 अंकीय संख्या में बदलते हैं। इस एक अंकीय संख्या को दायीं ओर के त्रिभुज में रखते हैं।

$$\begin{array}{r} 1\,\bar{2}\,\bar{1} \\ 1\,\bar{3}\,\bar{2} \\ \hline 5\,3\,7\,2 \end{array}$$



$\bar{2}\times\bar{4}=8$

चरण 5 : दिये गये उत्तर के सभी अंकों को जोड़ते हैं यदि योगफल दो अंकों में प्राप्त हो तो पुनः जोड़कर एक अंकीय संख्या प्राप्त करते हैं। इस अंक को बायीं ओर वाले त्रिभुज में रखते हैं।

जांच : यदि बायीं व दायीं ओर वाले त्रिभुजों के अंक समान हों तो प्राप्त गुणनफल शुद्ध है।

इस उदाहरण के लिये

$5+3=8,\ 8+7=15;\ 1+5=6,\ 6+2=8$

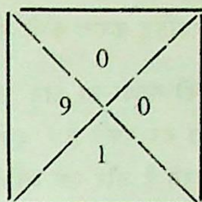
हम देखते हैं कि दायीं व बायीं ओर के त्रिभुजों के अंक समान हैं इस प्रकार हमारा गुणनफल शुद्ध है।

8·4·2 उदाहरण 6 :

उदाहरण 3 के गुणनफल की जाँच करो।

चरण 1 : संख्याओं एवं गुणनफल को तीन पंक्तियों में लिखते हैं एवं एक वर्ग भी खींचते हैं ।

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{2}\ \bar{2}\ 2\ 1 \\ 2\ 2\ \bar{1}\ 0\ \bar{2} \\ \hline 609180462 \\ \hline \end{array}$$



$0 \times 1 = 0$

चरण 2 : प्रथम संख्या से $3+\bar{2}=1$, $1+\bar{2}=\bar{1}$, $\bar{1}+2=1$, $1+\bar{1}=0$ इसे ऊपर के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 3 : गुणांक के लिये $2+2=4$, $4+\bar{1}=3$, $3+\bar{2}=1$ इसे नीचे के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 4 : ऊपर व नीचे के त्रिभुजों के अंकों को गुणा करते हैं। $0 \times 1=0$ इसे दायीं ओर के त्रिभुज में रखते हैं।

चरण 5 : दिये गये उत्तर में (0 एवं 9 को विलोम करते हुए)

$6+1=7$, $7+8=15$; $1+5=6$, $6+4=10$; $1+0=1$
$1+6=7$, $7+2=9$

जैसा कि पहले ही बताया जा चुका है कि विनकुलम् वाली संख्याओं के लिये 0 एवं 9 समान ही होते हैं।

इसी प्रकार $8 \equiv -1$, $7 \equiv -2$ इत्यादि।

जांच : दायीं व बायीं ओर के त्रिभुजों से स्पष्ट है कि गुणनफल सर्वथा शुद्ध है।

8·5 ऋणात्मक संख्यायें : ऋणात्मक संख्या के प्रत्येक अंक को हम बार के साथ (विनकुलम् रूप में) लिख सकते हैं। पाँच से बड़ी बार वाले अंकों को धनात्मक अंकों में परिवर्तित करने के लिये भी वही विधि अपनाते हैं जो विधि धनात्मक संख्या को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करने के लिये प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 7 : $-27489 = \bar{2}\bar{7}\bar{4}\bar{8}\bar{9}$

$\bar{7}$ व $\bar{8}$ $\bar{9}$ के पूरक अंक ज्ञात करने के लिए हम निखिलम् सूत्र का प्रयोग करते हैं। और इन अंकों से पहले वाले अंक को एक कम करते हैं, क्योंकि बार वाले बड़े अंकों को सामान्य (धनात्मक) रूप में परिवर्तित करना है।

$$\bar{2}\bar{7}\bar{4}\bar{8}\bar{9} = \bar{3}3\bar{5}11$$

उदाहरण 8 : $-70829 = \bar{7}\bar{0}\bar{8}\bar{2}\bar{9}$

$$= \bar{1}3\bar{1}2\bar{3}1$$

यह स्पष्ट है कि यदि किसी संख्या का प्रथम अंक बार वाला है, तब उस संख्या का मान ऋणात्मक ही होगा। पुनः इस प्रकार की संख्या के प्रत्येक अंक को धनात्मक अंक में परिवर्तित करना कभी भी सम्भव नहीं होगा।

8·5·1 : इस प्रकार की संख्या का मान सीधे ही सभी अंकों को बार वाले अंकों में परिवर्तित करके प्राप्त कर सकते हैं। दूसरी विधि में हम सभी अंकों को धनात्मक अंकों में परिवर्तित करते हैं और एक अतिरिक्त अंक $\bar{1}$ बायीं ओर आ जाता है और निखिलम् सूत्र के प्रयोग से धनात्मक अंकों के पूरक अंक लिखने से ही ऋणात्मक संख्या मिल जाती है।

उदाहरण 9 : (i) $\bar{3}78\bar{2}1 = -3\bar{7}\bar{8}2\bar{1}$

$= -22219$

(ii) या सीधे ही हम धनात्मक अंकों को बार अंकों में परिवर्तित करते हैं।

$\bar{3}78\bar{2}1 = \bar{2}\bar{2}\bar{2}\bar{1}\bar{9} = -22219$

यहाँ $\bar{3}+1=\bar{2}$ और $\bar{2}+1=\bar{1}$

(iii) या बार अंकों को धनात्मक अंकों में परिवर्तित करके

$\bar{3}78\bar{2}\bar{1} = \bar{1}77781$

पुनः धनात्मक अंकों के पूरक अंकों से हमें अन्तिम उत्तर (ऋणात्मक संख्या) मिल जाता है। $(-100000+77781)$

$\bar{1}77781 = -022219$

यहाँ पर हमने देखा कि दूसरी विधि ही सबसे सरल व सीधी है।

8·5·2 : दशमलव संख्याएँ : दशमलव संख्याओं को विनकुलम् रूप में लिखने के लिए भी यही विधि अपनाते हैं और दशमलव का बिन्दु उसी स्थान पर लगाते हैं, जहाँ पहले लगा है। अतः यहाँ कोई विशेष कार्य की आवश्यकता नहीं होती है।

उदाहरण 10 : $120{\cdot}981 = 12\bar{1}{\cdot}0\bar{2}1$

उदाहरण 11 : $0{\cdot}\bar{3}72\bar{8} = -0{\cdot}3\bar{7}\bar{2}8$

$= -0{\cdot}2288$

या $0{\cdot}\bar{3}72\bar{8} = \bar{1}{\cdot}7712 = -0{\cdot}2288$

या सीधे ही $0{\cdot}\bar{3}72\bar{8} = 0{\cdot}\bar{2}\bar{2}\bar{8}\bar{8} = -0{\cdot}2288$

अभ्यास :

प्रश्न 1 : निम्न प्रश्नों को सामान्य विधि व अन्य विधियों द्वारा हल करें। तुलना करें और बताएँ कि प्रत्येक में उपयुक्त कौनसी है ?

(अ) (i) 133×179 (ii) 141×281
(iii) 371×433 (iv) 1278×9034
(v) 12078×10304 (vi) 378^2
(vii) 81265×32112

(ब) (i) 89588×787 (ii) 8858×78
(iii) 6548×789 (iv) 432008×1212
(v) 9238×1010101 (vi) 987^2
(vii) 1021^2

प्रश्न 2 : निम्न प्रश्नों को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करके साधारण विधि द्वारा गुणा करें—

(i) 787×391 (ii) 282×132
(iii) 181×98 (iv) 271×87
(v) 591×187 (vi) 483×179
(vii) 1892×197 (viii) 9867×918
(ix) 90908×81826 (x) 81739×9019
(xi) $906108 \angle 9079$

प्रश्न 3 : प्र० 1 व प्र० 2 के सभी प्रश्नों की वैदिक विधि द्वारा जांच करें।

अध्याय-9

भाग–निखिलं विधि

9·1 परिचय : हमने पुष्प-1 में निखिलं विधि द्वारा बड़ी संख्याओं को गुणा करने का अध्ययन किया। निखिलं सूत्र को प्रयोग करते हुए हमने पहाड़े व विनकुलम् संख्याओं का विधि सहित अध्ययन किया। गुणा की तरह ही निखिलं सूत्र को भाग करने के लिए भी सरलता से प्रयोग कर सकते हैं। जब भाजक काफी बड़ा हो तो निखिलं सूत्र का प्रयोग करने से भाग करना बहुत सरल हो जाता है और कार्य काफी शीघ्रता से हो जाता है।

9·2 निखिलं विधि : प्रथम चरण में हम भाजक को निखिलं सूत्र (क्रमांक 2) का प्रयोग करते हुए संशोधित करते हैं और फिर उस संशोधित भाजक को आगे के सभी चरणों में प्रयोग करते हैं। निम्नलिखित उदाहरणों से विधि स्पष्ट हो जाएगी।

प्रकार 1 :

9·2·1 उदाहरण 1 : 34 को 9 से भाग करो।

$9\overline{)34}$

चरण 1 : निखिलं सूत्र को प्रयोग करके भाजक को संशोधित करते हैं। निखिलंनवतश्चरमंदशतः, अतः अन्तिम को दस से और शेष को 9 में से घटाते हैं। यहाँ (10—9 =1) 1 संशोधित भाजक है। इस संशोधित भाजक को शेष विधि के लिए प्रयोग करते हैं।

चरण 2 : हम संशोधित भाजक और भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं और भाज्य के अन्तिम अंक के पहले एक तिरछी रेखा खींचते हैं।

अतः $9\overline{)3/4}$

1

क्योंकि हमारा भाजक 1 अंक का है अतः तिरछी रेखा दायीं ओर के एक अंक के पहले खींचते हैं और इसके दायीं ओर शेषफल प्राप्त होगा।

चरण 3 : अब भाज्य के पहले अंक की गुणा संशोधित भाजक से करते हैं। अतः (3 × 1 = 3) प्राप्त गुजनफल को भाज्य के अगले अंक (यहाँ 4) के नीचे लिखेंगे।

```
9)‾ 3/4
1     3
———————
    3
———————
```

चरण 4 : अब अगले चरण के लिए अगले स्तम्भ को जोड़ते हैं। अतः $4+3=7$

```
9)‾ 3/4
1     3
———————
    3/7
———————
```

चूंकि हम भाज्य के अन्तिम अंक तक पहुँच चुके हैं अतः परिणाम में तिरछी रेखा का बायाँ पक्ष भागफल व दाँया पक्ष शेषफल है।

भागफल $=3$

शेषफल $=7$

9·2·2 उदाहरण 2 : 60 को 9 से भाग करो।

चरण 1 : निखिलं सूत्र का प्रयोग करके भाजक को संशोधित करें। अतः संशोधित भाजक $=1$

चरण 2 : भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

```
9)‾ 60
1
```

चरण 3 : भाज्य के अन्तिम अंक के पहले तिरछी रेखा खींचते हैं

```
9)‾ 6/0
1
```

चरण 4 : भाज्य के पहले अंक 6 को संशोधित भाजक 1 से गुणा $(6\times1=6)$ करते हैं और गुणनफल (6) को अगले अंक के नीचे लिखते हैं।

```
9)‾ 6/0
1     6
———————
    6 /
```

चरण 5 : अब अगले स्तम्भ $(0+6=6)$ को जोड़ते हैं। अतः

```
9)‾ 6/0
1    /6
———————
    6/6
```

भागफल $=6$

शेषफल $=6$

9·2·3 उदाहरण 3 : 71 को 9 से भाग करो।

हम परिणाम सीधे भाग से लिख सकते हैं। जैसे

9)‾ 7/1
1 7
————
7/8

अतः भागफल = 7
शेषफल = 8

9·2·4 उदाहरण 4 : यदि भाज्य बड़ा हो तब भी हम भाग उसी विधि द्वारा करते हैं। अतिरिक्त चरण नीचे दिए गए हैं।

213 को 9 से भाग करो।

9)‾ 213

चरण 1 : निखिलं सूत्र का प्रयोग करने पर संशोधित भाजक 1 है।

चरण 2 : भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं और भाज्य के आखिरी अंक के पहले तिरछी रेखा खींचते हैं अतः

1 2 3 स्तम्भ क्रमांक

9)‾ 2 1/3
1

क्योंकि भाजक 1 अंकीय है।

चरण 3 : अब भाज्य के अन्तिम अंक 2 को संशोधित भाजक 1 से गुणा (2 × 1 = 2) करते हैं। और गुणनफल 2 को स्तम्भ 2 (अगले अंक 1) के नीचे रखते हैं।

अतः

9)‾ 21/3
1 2
————
2

चरण 4 : अब स्तम्भ 2 के अंकों को जोड़ते (1 + 2 = 3) है। अतः अगला गुणक अंक 3 है।

9)‾ 21/3
1 2
————
23/

चरण 5 : अब गुणक अंक 3 को संशोधित भाजक 1 से गुणा (1 × 3 = 3) करके स्तम्भ 3 के नीचे रखते हैं।

```
9)‾  21/3
1     2 3
──────────
     23/
```

चरण 6 : अब स्तम्भ 3 के अंकों को जोड़ते हैं। (3+3=6) चूंकि हम भाज्य के अन्तिम अंक तक पहुँच गए हैं।

```
9)‾  21/3          अतः परिणाम भागफल=23
      2/3                     शेषफल=6
──────────
     23/6
```

9·2·5 उदाहरण 5 : 1 1 2 0 2 1 1 को 9 से भाग करो।

```
9)‾   1 1 2 0 2 1/1
1       1 2 4 4 6/7
───────────────────
      1 2 4 4 6 7/8
───────────────────
```

अतः भागफल=124467

शेषफल=8

9·2·6 टिप्पणी : (1) इन सभी उदाहरणों में हमने देखा कि हमने भाग नहीं किया है।

(2) हमें सिर्फ एक अंक को एक अंक से ही गुणा करके और जोड़कर परिणाम मिला है।

(3) ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों में संशोधित भाजक 1 होने के कारण गुणा नाम मात्र की ही है।

9·3 प्रकार 2 : अब हम दूसरे प्रकार के उदाहरण लेते हैं विधि वही रहेगी।

9·3·1 उदाहरण 6 : 1012 को 8 से भाग करें। इस उदाहरण में भाजक 8 है अतः संशोधित भाजक (10—8=2) 2 होगा। अर्थात हम शेष कार्य 2 से करेंगे।

```
8)‾  101/2
2     24/10
───────────
     125/12
```

विवेचना : यहाँ पर शेषफल 12 भाजक से बड़ा हो गया है अतः हम शेषफल को पुनः संशोधित भाजक 2 से भाग करेंगे।

```
8)‾   1 0 1 / 2
2       2 4 10
    ──────────
      1 2 5/1/2
              2
    ──────────
      1 2 5/1/4
या    125 + 1/4
      126    /4
```

और भागफल 1 को पहले प्राप्त भागफल 125 में जोड़ते हैं 125 + 1 = 126

अतः भागफल = 126

शेषफल = 4

9·3·2 उदाहरण 7 : 10116338 को 9 से भाग करो।

```
9)‾   1 0 1 1 6 3 / 8
1       1 1 2 3 9 / 12
    ──────────────────
      1 1 2 3 9₁ 2/20
या    1 1 2 4 0 2 / 2 / 0
                        2
    ──────────────────
      1 1 2 4 0 2 / 2 / 2
      1 1 2 4 0 4 / 2
```

अतः भागफल = 112404

शेषफल = 2

टिप्पणी : (1) इन प्रश्नों में विभिन्न पंक्तियों को एक ही पंक्ति में सरलता के लिए लिख दिया गया है।

(2) यहाँ पहली बार हमें शेषफल 20 प्राप्त हुआ जो कि भाजक से बड़ा है। इसलिए पुनः भाग देने पर हमें भागफल 2 प्राप्त हुआ जिसे हमने पहले के भागफल में जोड़ दिया।

9·4 प्रकार 3 : यदि भाजक एक अंक से बड़ा हो तो भी हम निखिलं सूत्र का प्रयोग उसी सरलता व क्षमता के साथ कर सकते हैं।

9·4·1 उदाहरण 8 : 34567 को 89 से भाग करो।

89) 3 4 5 6 7
11 3 3
7 7
15 15

$3\ 7_1{}^{5}/28\ {}_2{}^2$

3 8 5/3/02
11 33

3 8 5/3/3 5
या 3 8 5 + 3/35
या 3 8 8/35

अतः भागफल = 388
शेषफल = 35

9·4·2 उदाहरण 9 : 1011638 को 987 से भाग करो।

9 8 7) 1 0 1 1/6 3 8
0 1 3 0 1 3/
0 0/0
0/2 6
/0 4 12

$1\ 0\ 24/8\ {}_1{}^3{}_2\ 0$

1024/950

अतः भागफल = 1024
शेषफल = 950

विवेचना : (1) यदि भाजक को संशोधित करने पर शून्य मिलता है तो हमें उसे भी अवश्य गुणा करनी चाहिए।

(2) यदि गुणक अंक शून्य आ जाए तो हमें 0 से गुणा करके गुणनफल 0 अवश्य लिखना चाहिए। इससे त्रुटियां होने की सम्भावना कम रहती है।

9·4·3 उदाहरण 10 : 20145 को 9818 से भाग करो।

$$
\begin{array}{llllllll}
9 & 8 & 1 & 8) & 2/0 & 1 & 4 & 5 \\
0 & 1 & 8 & 2 & & 0 \; 2 & 16 & 4 \\
\hline
 & & & & 2/0 & 3_2 & 0 & 9
\end{array}
$$

या 2/0509

यहाँ पर भाजक में अंक 8 है जो कि बड़ी संख्या है। अतः हम इसे विनकुलम् द्वारा छोटा करके भी भाग कर सकते हैं। उसका गुणनफल भी चिन्ह सहित आता है।

जैसे

$$
\begin{array}{llllllll}
9 & 8 & 1 & 8) & 2/0 & 1 & 4 & 5 \\
0 & 1 & 8 & 2 & & 0\;4 & \bar{4} & 4 \\
0 & 2 & \bar{2} & 2 & & & & \\
\hline
 & & & & 2/0 & 5 & 0 & 9
\end{array}
$$

या 2/0 5 0 9

अतः भागफल = 2

शेषफल = 509

नोट : विनकुलम् द्वारा भाग करने से संख्याओं को भाग करना और भी सरल हो जाता है।

9·4·4 उदाहरण 11 : 98564318 को 9886 से भाग करो।

इस उदाहरण के भाज्य के कुछ अंक 5 से वड़े हैं अतः पहले भाज्य को विनकुलम् में परिवर्तित करते हैं।

$98564318 = 10\bar{1}\bar{4}\bar{4}432\bar{2}$

$$
\begin{array}{llllllllllll}
9 & 8 & 8 & 6) & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4}/4 & 3 & 2 & \bar{2} \\
0 & 1 & 1 & 4 & & 0 & 1 & 1 & 4 & & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0/0 & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0/0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0/\bar{3} & \bar{3} & \bar{1}\bar{2} & \\
 & & & & & & & & /0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

1 0 0 3̄ 0/1 0 Ī0̄ 2

1 0 0 3̄ 0/1 Ī 0̄2

9970/0898

अत: भागफल = 9970

शेषफल = 898

9·5 टिप्पणी : (1) गुणा करते समय कई बार हमें एक से अधिक अंकों का गुणनफल प्राप्त हो जाता है, ऐसी स्थिति में पूरे गुणनफल को हम यथास्थान स्तम्भ में लिखते हैं और अंकों के स्तम्भ का स्थान परिवर्तित नहीं करते हैं।

(2) उदाहरण 11 में हमें 3̄ को 4 से गुणा करने पर Ī2̄ प्राप्त हुआ जिसे हमने दूसरे स्तम्भ में लिख दिया।

(3) विभिन्न स्तम्भों को जोड़ते हुए यदि जोड़ दस या उससे बड़ा होता है तो हम दहाई के अंक को अगले स्तम्भ में जोड़ देते हैं। परन्तु किसी भी स्थिति में हम शेषफल के अतिरिक्त अंक को भागफल में नहीं जोड़ते हैं। ऐसी स्थिति में कई बार भागफल भाजक से बड़ा व अतिरिक्त अंक का हो जाता है।

(4) ऊपर के उदाहरण में दूसरे स्तम्भ को जोड़ते समय Ī2̄ में से 2̄ को दूसरे स्तम्भ के अन्य अंकों में जोड़ा व अतिरिक्त Ī को उससे आगे के स्तम्भ में जोड़ा गया है।

9·6 विवेचना : (अ) इन सभी उदाहरणों में हमने देखा कि हमें किसी भी प्रकार की भाग की कोई आवश्यकता नहीं पड़ी और प्रचलित भाग विधि में प्रयोग किए जाने वाले सम्भावित संचालक अंक की कोई आवश्यकता नहीं पड़ती है।

(आ) वैदिक पद्धति में बड़ी संख्याओं से भाग के प्रश्न अत्याधिक सरल गुणा व जोड़ में परिवर्तित हो जाते हैं और यह गुणा भी साधारणतया मात्र एक अंक की ही होती है।

(इ) यदि भाज्य के अंक बड़े हों तो गुणा कार्य कुछ कठिन हो जाता है, लेकिन विनकुलम् पद्धति से यह कार्य भी बहुत सरल हो जाता है। (उदाहरण 10)

9·7 दशमलव : निखिलं विधि को हम भाग का परिणाम दशमलव रूप में लाने के लिए भी प्रयोग कर सकते हैं। विधि ऊपर दिए गए उदाहरणों के समान और उसी तरह सरल व सुगम है। विधि में कोई नयापन नहीं है। यह निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

9·7·1 उदाहरण 12 : 345675 को 9 से भाग करके परिणाम दशमलव के 10 स्थान तक निकालो।

```
9)‾‾   3 4 5  6  7/ 5
1         3 7 12 18/25
     ______________________
       3 7₁ 2₁ 8₂ 5/30

9)‾  3 8 4 0 5/3/0
1                    3
____________________________
       38408/30000000C0/0
9)‾              333333333/3
1
____________________________
       38408·3333333333
```

अतः भागफल = 38408·333333333

9·7·2 उदाहरण 13 : 2341 को 89 से दशमलव के 3 स्थानों तक भाग करो।

```
         89 )‾  2 3/4 1
         11       2/2
                    5 5
              ____________
                2 5/₁ 1 6

                  1/1 6
                      1 1
              ______________
                2 5+1/2 7
या              2 6/2 7 0/0 0
                     2 2
                       9/ 9
                       /11   11
              __________________
                2 6/2 9₁ 1/2 0₁1

                2 6/3 0  1/2 1 1
                2 6/3 0  1/2 /  1  1
                                2  2
              ______________________
                2 6/3 0 1+2/3 3
```

26·303/33

अतः भागफल = 26·303

नोट : पत्राचार पाठ्यक्रम में इसके अनेकों उदाहरण विस्तारपूर्वक दिये गये हैं। विनकुलम् के प्रयोग से कार्य सरल हो जाता है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित प्रश्नों को निखिलं सूत्र द्वारा भाग करो।

(i) 12483 ÷ 7988

(ii) 10015 ÷ 89

(iii) 210011 ÷ 8996

(iv) 1010108 ÷ 8988

प्रश्न 2. (i) 1987 को 899 से भाग करो।

(ii) 1294468 को 89997 से भाग करो।

(iii) 2645678 को 7777 से भाग करो।

प्रश्न 3. (i) 145672 को 99 से भाग करके परिणाम दशमलव के 3 स्थान तक निकालो।

(ii) 1758011 को 887 से भाग करके परिणाम दशमलव के 4 स्थान तक निकालो।

(iii) 101010 को 23 से भाग करके परिणाम दशमलव के 2 स्थान तक निकालो।

अध्याय-10

भाग-परावर्त्य योज्येत

10·1 परिचय : पिछले अध्याय में हमने मुख्यतः बड़े भाजक द्वारा भाग करने का अध्ययन किया है, इसमें हम बड़े भाजक को पहले निखिलं सूत्र द्वारा विनकुलम् में परिवर्तित करते हैं। परन्तु छोटे भाजक के लिए यह विधि कठिन है। इस अध्याय में हम छोटे भाजक द्वारा भाग करने का अभ्यास करेंगे।

यह विधि "परावर्त्य योज्येत" नामक सूत्र पर आधारित है। जिसका अर्थ है "चिन्ह परिवर्तन करके उपयोग करना चाहिए।" यह एक घुमावदार सूत्र है। इस विधि में एक आवश्यक तथ्य यह है कि भाजक का पहला अंक इकाई (1) होना आवश्यक है। यदि ऐसा न हो तब भी भाजक को संशोधित कर लेते हैं।

10·2 विधि : जब भाजक का पहला अंक एक है, तब हम जो विधि निखिलं सूत्र द्वारा भाग करने के लिए अपनाते हैं, वही विधि इसमें प्रयोग की जाती है, अन्तर सिर्फ आरम्भ के चरणों में भाजक को संशोधित करने का है। समस्त चरणों सहित विधि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट हो जाएगी।

10·2·1 उदाहरण 1 : 1235 को 112 से भाग दो।

चरण 1 : सर्वप्रथम हम भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

(भाजक) 112)‾ 1235 (भाज्य)
3 अंक चार अंक

चरण 2 : (अ) जैसा आपको ज्ञात है कि भाजक का पहला अंक एक होना चाहिए और हम इस अक को छोड़कर शेष बचे भाजक को चिन्ह बदलकर लिखते हैं जैसे :–

$12 = \overline{1}\overline{2}$ (संशोधित रूप)

112)‾ 1235
$\overline{1}\overline{2}$

(ब) हम भाज्य के अन्तिम दो अंकों के बाद एक तिरछी रेखा खींचते हैं जो यह दर्शाती है कि इसके दायीं ओर वाली संख्या शेषफल होगी।

क्रम संख्या	तृ०	द्वि०	प्र०		चतु०	तृ०		द्वि०	प्र०
	1	1	2	)‾	1	2	/	3	5

चरण 3 : इसके शेष सभी चरण वैसे ही हैं जैसे निखिलम् सूत्र द्वारा भाग की विधि में बताया गया है।

हम भाज्य की अन्तिम संख्या को भाजक के संशोधित रूप के प्रत्येक अंक ($\bar{1}$ एवं $\bar{2}$) से गुणा करके भाज्य के द्वितीय एव तृतीय अंकों के नीचे लिखते हैं यहाँ भाज्य का चतुर्थ अंक (1) गुणक होगा।

(ब) अब हम अगली पंक्ति को जोड़ते हैं ($2+\bar{1}=1$) जिसके द्वारा हमें अगला गुणांक प्राप्त होगा। अतः यहाँ पर अंक 1 अगला गुणाँक होगा।

चरण 4 : (अ) अब हम गुणांक 1 को फिर से संशोधित भाजक के प्रत्येक अंक ($\bar{1}$ एवं $\bar{2}$) से गुणा करके भाज्य के अगले दो अंकों के नीचे लिखते हैं।

$$\begin{array}{lllll} 1\ 1\ 2) & 1 & 2 / & 3 & 5 \\ \ \ \bar{1}\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & & \\ & & \bar{1} & \bar{2} & \\ \hline & 1 & 1 / & & \end{array}$$

(ब) अगले स्तम्भ को जोड़ते हैं। ($3+\bar{2}+\bar{1}=0$) यहाँ पर हम भाज्य के अन्तिम अंक तक पहुँच गए हैं अतः हमें आखिरी स्तम्भ को जोड़ने से उत्तर प्राप्त हो जाएगा। ($5+\bar{2}=3$)

$$\begin{array}{lllll} 1\ 1\ 2) & 1 & 2 / & 3 & 5 \\ \ \ \bar{1}\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & & \\ & & \bar{1} & \bar{2} & \\ \hline & 1 & 1 / & 0 & 3 \end{array}$$

अतः भागफल = 11

शेषफल = 03

10·2·2 उदाहरण 2 : 13291 को 1125 से भाग करो।

चरण 1 : भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप से लिखते हैं।

1125) 13291

चरण 2 : भाजक का पहला अंक 1 है अतः उसे छोड़कर शेष भाजक को संशोधित करते हैं।

$$125 = \bar{1}\bar{2}\bar{5}$$

अब हम भाज्य में तीन अंकों के पहले तिरछी रेखा खींचते हैं। क्योंकि संशोधित भाजक तीन अंकों की संख्या है अतः भाज्य के तीन अंकों के पहले तिरछी रेखा खींचते हैं।

$$\begin{array}{llll} 1\,1\,2\,5) & 1\,3 & / & 2\,9\,1 \\ \quad\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{5} & & & \end{array}$$

चरण 3 : हम भाज्य की अन्तिम संख्या 1 को भाजक के अंकों से गुणा करके अगले तीन अंकों (भाज्य के) के नीचे लिखते हैं।

(ब) हम अगले गुणांक के लिए अगले स्तम्भ को जोड़ते हैं। $(3+\bar{1}=2)$

$$\begin{array}{lcccccc} 1\,1\,2\,5) & 1 & 3 & / & 2 & 9 & 1 \\ \quad\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{5} & & \bar{1} & & \bar{2} & \bar{5} & \\ \hline & 1 & 2 & / & & & \end{array}$$

चरण 4 : हम गुणांक 2 को संशोधित भाजक $(\bar{1}\bar{2}\bar{5})$ के प्रत्येक अंक से गुणा करके भाज्य के अगले तीन अंकों के नीचे लिखते हैं।

(स) अब हमें अगले तीन स्तम्भों को जोड़कर परिणाम मिलेगा।

$$\begin{array}{lcccccc} 1\,1\,2\,5) & 1 & 3 & / & 2 & 9 & 1 \\ \quad\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{5} & & \bar{1} & & \bar{2} & \bar{5} & \\ & & & & \bar{2} & \bar{4} & \overline{10} \\ \hline & 1 & 2 & / & \bar{2} & \bar{0} & \bar{9} \end{array}$$

या $\quad 11/1125+\bar{2}\bar{0}\bar{9}$

या $\quad 11/916$

अत: भागफल $=11$, शेषफल $=916$

टिप्पणी : (1) यहाँ पर हमें ऋणात्मक शेषफल विनकुलम् रूप में प्राप्त होता है। जिसे हमें सामान्य रूप में लिखने के लिए भागफल में से 1 कम करके शेषफल में जोड़ना पड़ता है, जिससे हमें अन्तिम शेषफल प्राप्त होता है। परावर्त्य विधि द्वारा भाग करने से यह स्थिति आ सकती है।

(2) इसमें एक रोचक तथ्य यह है कि इस विधि में हमने भाग तो कहीं किया ही नहीं है। हमने सिर्फ सरल अंकों की गुणा और साधारण जोड़ (चिन्हों सहित) ही किया है।

10·2·3 उदाहरण 3 : 1211 को 112 से भाग करो।

$$\begin{array}{lccccc} 1\,1\,2) & 1 & 2 & / & 1 & 1 \\ \quad\bar{1}\,\bar{2} & & \bar{1} & & \bar{2} & \\ & & & & \bar{1} & \bar{2} \\ \hline & 1 & 1 & / & \bar{2} & \bar{1} \end{array}$$

भागफल $=11$ शेषफल $=\bar{2}\bar{1}$

एक बार फिर हमें ऋणात्मक शेषफल प्राप्त होता है जिसे सामान्य रूप में लाने के लिए हम भागफल में से एक कम करके (112) को बीजगणितीय विधि से शेषफल में $(112+\bar{2}\bar{1})$ जोड़ते हैं। अतः

संशोधित भागफल $= 11 - 1 = 10$

शेषफल $= 112 + \bar{2}\bar{1} = 91$

10·2·4 उदाहरण 4 : 13254 को 1132 से भाग करें।

$$
\begin{array}{llllll}
1\ 1\ 3\ 2) & 1 & 3 & / \ 2 & 5 & 4 \\
\ \ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{2} & & \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \\
 & & & \bar{2} & \bar{6} & \bar{4} \\
\hline
 & 1 & 2 & / \ \bar{3} & \bar{3} & 0
\end{array}
$$

(संशोधित रूप) $11 / 802 \quad (1132 + \bar{3}\bar{3}0)$

10·3 बड़ी संख्याओं द्वारा भाग : अब हम बड़ी संख्याओं को परावर्त्य विधि अपनाते हुए भाग करेंगे, लेकिन इसमें एक अतिरिक्त चरण यह है कि प्रथम हम बड़ी संख्याओं को विनकुलम् रूप में लिखेंगे और शेष विधि समान रहेगी। निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा विधि स्पष्ट हो जाएगी।

10·3·1 उदाहरण 5 : 112 को 89 से भाग करो।

इसमें सबसे पहले भाजक (89) को विनकुलम् रूप में लिखेंगे। $89 = 1\bar{1}\bar{1}$ तथा परावर्त्य विधि अपनाते हुए भाग करेंगे।

$$
\begin{array}{llll}
1\ \bar{1}\ \bar{1}) & 1 & / \ 1 & 2 \\
\ \ 1\ 1 & & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & / \ 2 & 3
\end{array}
$$

भागफल $= 1$, शेषफल $= 23$

10·3·2 उदाहरण 6 : 40000 को 9808 से भाग करो।

$9808 = 10\bar{2}1\bar{2}$

$$
\begin{array}{llllll}
1\ 0\ \bar{2}\ 1\ \bar{2}) & 4 & / \ 0 & 0 & 0 & 0 \\
\ \ 0\ \bar{1}\ 2 & & 0 & 8 & \bar{4} & 8 \\
\hline
 & 4 & / \ 0 & 8 & \bar{4} & 8
\end{array}
$$

अतः भागफल $= 4$, शेषफल $= 768$

10·3·3 उदाहरण 7 : 81946 को 898 से भाग करो। यहाँ पर हम भाजक तथा भाज्य दोनों को ही विनकुलम् रूप में लिखेंगे।

$$81946 = 1\bar{2}2\bar{1}5\bar{4}$$

$$898 = 1\bar{1}0\bar{2}$$

$$\begin{array}{llll} 1\bar{1}0\bar{2}) & 1\,\bar{2}\,2 & / & \bar{1}\,5\,\bar{4} \\ 102 & 1\,0\,2 & & \\ & \quad\;\bar{1} & / & 0\,\bar{2} \\ & & / & 1\,0\,2 \\ \hline & 1\,\bar{1}\,1 & / & 2\,3\,\bar{2} \end{array}$$

या 91 / 228

अत: भागफल = 91, शेषफल = 228

10·4 टिप्पणी : (1) यहाँ पर ध्यान देने वाला तथ्य यह है कि इस तरह के कठिन प्रश्नों को वैदिक विनकुलं विधि द्वारा सरलता से हल किया जा सकता है। इससे सभी बड़े अंक छोटे अंकों में परिवर्तित हो जाते हैं और कार्य सरलता से कर लेते हैं।

(2) ऊपर हल किए हुए उदाहरणों में आपने यह देखा कि परावर्त्य तथा निखिलं विधि में कितनी समानता है। यदि हम ध्यान-पूर्वक देखें तो हम पायेंगे कि परावर्त्य विधि में भाजक का जो संशोधित रूप मिलता है, वही रूप हमें निखिलं विधि से भी प्राप्त होता है।

10·5 अन्य भाजक : पिछले सभी उदाहरणों में भाजक का पहला अंक 1 ही था। यदि किसी प्रश्न में यह स्थिति नहीं होती है तब हमें एक अतिरिक्त चरण की आवश्यकता पड़ती है। इस स्थिति में गुणा की तरह हम अनुरूपेण उपसूत्र का प्रयोग करेंगे।

10·5·1 उदाहरण 8 : 1354 को 184 से भाग करो।

$184 = 2\bar{2}4$, परावर्त्य विधि को अपनाने के लिए भाजक का पहला अंक इकाई (1) होना चाहिए। अत: हम $2\bar{2}4$ को 2 से भाग करेंगे जिससे हमें $1\bar{1}2$ मिलता है, जो कि हमारा नया भाजक होगा। शेष विधि समान ही है।

$2 \,/\, 2\,\bar{2}\,4$

$1\,\bar{1}\,2)\overline{} \quad 1\,3 \,/\, 5\,4$

$1\,\bar{2} \qquad 1 \quad \bar{2}$

$4\,\bar{8}$

$2)\overline{} \quad 1\,4 \,/\, 7\,\bar{4}$

$7 \,/\, 7\,\bar{4}$

या $7/66$

अतः हम भागफल को भी (2) से भाग करेंगे क्योंकि हमने भाजक को (2) से भाग किया है, लेकिन शेषफल को हम वैसा ही रहने देंगे अर्थात् हमें शेषफल को भाग नहीं करना है। इस विधि में हम पुनः अनुरूपेण उपसूत्र का प्रयोग करते हैं जिसे हम गुणा के उपआधार में भी प्रयोग करते हैं।

10·5·2 उदाहरण 9 : 1233 को 244 से भाग करो।

$2 \,/\, 2\,2\,4)\overline{} \quad 1\,2 \,/\, 3\,3$

$1\,1\,2 \qquad \bar{1} \,/\, \bar{2}$

$\bar{1}\,\bar{2} \qquad /\, \bar{1}\,\bar{2}$

$2)\overline{} \quad 1\,1 \,/\, 0\,1$

या $5\frac{1}{2} \,/\, 01$

$5 \,/\, 112+1=5 \,/\, 113$

जब हम भागफल (11) को उप भाजक (2) से भाग करते हैं तो हमें $5\frac{1}{2}$ मिलता है जिसका अर्थ है कि भागफल 5 है और भाज्य का आधा ($224 \times \frac{1}{2} = 112$) शेषफल की तरफ स्थानान्तरित करना पड़ता है।

अतः शेषफल $112+1=113$

10·5·3 उदाहरण 10 : 7684 को 672 से भाग करो।

भाजक को 6 से भाग करेंगे।

$7684 = 1\bar{2}\bar{3}\bar{2}4$

$6)\overline{} \quad 6\,7\,2$

$1\,1\,2)\overline{} \quad 1\,\bar{2}\,\bar{3} \,/\, \bar{2}\,4$

$\bar{1}\,\bar{2} \qquad \bar{1}\,\bar{2} \,/$

$3 \,/\, 6$

$/\, 2\,4$

$6)\overline{} \quad 1\,\bar{3}\,\bar{2} \,/\, 6\,8$

या $\quad 6)\overline{} \quad 68 \,/\, 68$

या $\quad 11\frac{1}{3} \,/\, 68$

$\frac{1}{3} \times 672 = 224$

और शेषफल $= 224 + 68 = 292$

अत: भागफल $= 11$

शेषफल $= 292$

हम इस प्रश्न को दूसरी तरह भी कर सकते हैं। हम भाजक को 2 से गुणा करके भी भाग कर सकते हैं। अतः

$2 \times 672 = 1344$

$$\begin{array}{llll} 1\,3\,4\,4)\overline{} & 1\,\bar{2} & / & \bar{3}\quad \bar{2}\quad 4 \\ \,\bar{3}\,\bar{4}\,\bar{4} & \,\bar{3} & / & \bar{4}\quad \bar{4} \\ & & / & 15\quad 20\quad 20 \\ \hline & 1\,\bar{5} & / & 8_{1}\quad 4\quad {}_{2}4 \end{array}$$

5 / 964

भागफल $5 \times 2 = 10$

लेकिन शेषफल (964) भाजक (672) से बड़ा है अत: सही शेषफल 292 (964 − 672 = 292, तथा भागफल 10 + 1 = 11 होगा।

10·6 टिप्पणी : (1) स्थिति के अनुसार विनकुलम्, अपवर्त्य या उप भाजक का प्रयोग करके परावर्त्य विधि द्वारा भाग करना बहुत ही सरल तथा आसान है।

(2) ऊपर दिए गए अधिकतर उदाहरण निखिलम् तथा परावर्त्य विधि द्वारा समान रूप से भाग किए जा सकते हैं।

(3) भाग को हम कुछ और विधियों द्वारा भी कर सकते हैं लेकिन सबसे सरल विधि ऊपर दी जा चुकी है।

10·7 दशमलव रूप : दशमलव रूप में उत्तर प्राप्त करने के लिए परावर्त्य विधि को इसी सरलता से प्रयोग किया जा सकता है।

10·7·1 उदाहरण 11 : 563478 को 112 से भाग करने पर उत्तर दशमलव के 3 स्थान तक निकालो।

उत्तर $= 1\bar{5}0\bar{3}\bar{1}\cdot 1\bar{5}4\bar{5}8\bar{9}$

$= 5031\cdot05371$ (देखें अध्याय 14)

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित को परावर्त्य विधि द्वारा भाग करो।

(i) $1235 \div 11$

(ii) $1248 \div 61$

(iii) $13291 \div 1125$

(iv) $12351 \div 1012$

प्रश्न 2. (i) 21356 को 8818 से भाग करके, उत्तर दशमलव के 2 स्थान तक निकालो।

(ii) 1245 को 182 से भाग करके, उत्तर दशमलव के 4 स्थान तक निकालो।

(iii) 2534 को 224 से भाग करके, उत्तर दशमलव के 3 स्थान तक निकालो।

प्रश्न 3. निम्नलिखित को परावर्त्य विधि द्वारा प्रथम निखिल सूत्र का प्रयोग करके भाग करो—

(i) $52432256 \div 7998$

(ii) $345678 \div 6007$

(iii) $14587819 \div 11465$

अध्याय-11

साधारण भाग

11·1 परिचय : वैदिक गणित में भाग एक और विधि द्वारा भी किया जाता है। इस विधि में मानसिक कार्य थोड़ा अधिक करना पड़ता है, लेकिन परिणाम सीधा ही प्राप्त हो जाता है। यह विधि दो सूत्रों पर आधारित है। "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् और ध्वजंक" दूसरे सूत्र का अर्थ है ध्वज के ऊपर।

11·2 : निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा नई ध्वजंक विधि स्पष्ट हो जाएगी।

11·2·1 उदाहरण 1 : 46956 को 65 से भाग दो।

65)‾ 46956

चरण 1 : भाजक 65 में से, पहला अंक 6 भाजक वाली पंक्ति के नीचे रखते हैं, इसे हम प्रचालक संख्या कहेंगे और भाजक के दूसरे अंक 5 को ध्वजंक कहेंगे।

5)‾ 4 6 9 5 6
(प्रचालक संख्या 6) 6

इस विधि में हम सारा भाग प्रचालक संख्या 6 से ही करेंगे।

चरण 2 : इस उदाहरण में ध्वजंक एक है अत: शेषफल के लिए भी हम भाज्य के अन्त के एक अंक को दो-दो बिन्दुओं के बीच रखेंगे।

5)‾ 4 6 9 5 : 6 :
6

चरण 3 : हम 46 को 6 से भाग करेंगे जिससे भागफल का पहला अंक 7 और शेषफल 4 मिलता है। इस शेषफल 4 को भाज्य में अगले अंक (9) से पहले लिखेंगे। अगले चरण के लिए 49 प्राथमिक भाज्य होगा।

5)‾ 4 6 9 5 : 6 :
6 4

7

अब हम 49 में से ध्वजांक 5 और भागफल के पहले अंक 7 ($7 \times 5 = 35$) की गुणा को घटाते हैं।

$$\begin{array}{r} 49 \\ -35 \\ \hline 14 \\ \hline \end{array}$$

अतः 14 हमारा संशोधित भाज्य है।

चरण 4 : अब हम इस संशोधित भाज्य 14 को 6 से भाग करेंगे। जिससे हमें भागफल 2 (दूसरा अंक) और शेषफल 2 मिलता है। शेषफल को भाज्य के अगले अंक 5 से पहले लिखेंगे। अतः 25 हमारा अगला प्राथमिक भाज्य होगा।

दोबारा हम 25 में से ध्वजांक 5 और भागफल के अभी प्राप्त अंक 2 की गुणा ($5 \times 2 = 10$) को घटाते हैं। अब 15 हमारा अगला संशोधित भाज्य होगा।

$$\begin{array}{r} 25 \\ -10 \\ \hline 15 \\ \hline \end{array}$$

चरण 5 : पुनः हम संशोधित भाज्य 15 को प्रचालक संख्या 6 से भाग करेंगे। जिससे हमें भागफल 2 (तीसरा अंक) और शेषफल 3 मिलता है, जिसे हम भाज्य के अगले अंक 6 से पहले लिखते हैं। अतः 36 हमारा प्राथमिक शेषफल होगा। क्योंकि अंक 6 बिन्दुओं के मध्य में होने के कारण शेषफल का अंक है।

$$\begin{array}{ll} 5) & 4\ 6\ 9\ 5 : 6 : \\ 6 & \quad 4\ 2\ 3 \\ \hline & \quad 7\ 2\ 2 \\ \hline \end{array}$$

अब हम 36 में से ध्वजकं 5 और भागफल के अन्तिम अंक 2 की गुणा ($5 \times 2 = 10$) को घटाते हैं। जिससे हमें अन्तिम शेषफल 26 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r} 36 \\ -10 \\ \hline 26 \\ \hline \end{array}$$

```
5 )‾  4 6 9 5 : 6 :
6          4 2 3
       ——————————
          7 2 2 : 26 :
```

भागफल $=722$

शेषफल $=26$

11·2·2 उदाहरण 2 : 5120 को 64 से भाग करो।

```
4 )‾  5 1 2 : 0 :
6        3
     ——————————          अतः भागफल = 80
     80 :  0 :             शेषफल = 0
```

प्रचालक संख्या $=6$

$$\frac{51}{6}=48+3=8\times6+3$$

अतः दूसरा संशोधित भाज्य 0 है $(32-8\times4)$ आदि

11·2·3 उदाहरण 3 : 7648 को 94 से भाग दो।

```
4 )‾  7 6 4 : 8 :
9        4 3
     ——————————          अतः भागफल = 81
     8 1 : 3 4 :           शेषफल = 34
```

11·3 : हमने पिछले उदाहरणों में देखा कि वास्तव में हम दो अंकों के भाजक में से एक अंक से भाग करते हैं। ध्वजांक को मात्र प्राथमिक भाज्य के शुद्धिकरण के लिये ही प्रयोग करते हैं। अब हम तीन अंकों की संख्या द्वारा भाग के उदाहरण करेंगे।

11 3·1 उदाहरण 4 : 7142695 को 824 से भाग करो।

इस उदाहरण में भाजक 3 अंक का है। इस स्थिति में हम अन्तिम दो अंकों को ध्वजांक के रूप में प्रयोग करेंगे और अंक 8 को प्रचालक संख्या के रूप में। इस उदाहरण में ध्वजांक दो अंकों का होने के कारण हमें कुछ अतिरिक्त चरण करने पड़ते हैं, जो ऊर्ध्वतिर्यक सूत्र पर आधारित है।

```
24 )‾  7 1 4 2 6 : 9 5 :
8
```

आरम्भ के दो चरण उसी प्रकार होंगे जिस प्रकार ऊपर के उदाहरणों में दिये गए हैं।

चरण 1 : भाज्य 71 को प्रचालक संख्या 8 से भाग करने पर भागफल 8 (पहला अंक) और शेषफल 7 मिलता है।

```
24 )‾   7 1 4 2 6 : 9 5 :
 8          7
       ____________
          8
       ____________
```

अत: 74 प्राथमिक भाज्य है। तिर्यक गुणा करें

$$\begin{matrix} 24 \\ \times \\ 08 \end{matrix} = 2 \times 8 + 0 \times 4 = 16$$

मूल भाज्य प्राप्त करने के लिए 74 में से ध्वजंक के पहले अंक 2 को भागफल के पहले अंक से गुणा करके परिणाम ($8 \times 2 = 16$) को प्राथमिक भाज्य 74 में से घटाते हैं। अतः 58 मूल भाज्य है।

$$\begin{array}{r} 74 \\ -16 \\ \hline 58 \end{array}$$

चरण 2 : अब 58 (मूल भाज्य) को 8 (प्रचालक संख्या) से भाग करने पर 6 भागफल का दूसरा अंक और 10 (शेषफल) मिलता है।

```
24 )‾   7 1 4 2 6 : 9 5 :
 8          710
       ______________
          86
       ______________
```

अत: 102 हमारा अगला प्राथमिक भाज्य है।

अब 102 में से ध्वजंक (2 4) और भागफल के दोनों अंकों (8, 6) की तिरछी गुणा के गुणनफल (ऊर्ध्वतिर्यक सूत्र द्वारा)

$$\left[\begin{matrix} 8 & & 6 \\ & \times & \\ 2 & & 4 \end{matrix} = 32 + 12 = 44\right]$$

को ($102 - 44 = 58$) प्राथमिक भाज्य में से घटाते हैं। जिससे हमें अगला मूल भाज्य (58) मिलता है।

चरण 3 : पुनः 58 को 8 से भाग करने पर 6 (भागफल का तीसरा अंक) और 10 (शेषफल) मिलता है।

```
 24 )‾   7 1 4 2   6 : 9 5
 8          7 10 10
         ____________
           8  6  6
         ____________
```

अतः अगला प्राथमिक भाज्य है 106

फिर प्राथमिक भाज्य 106 में से ध्वजकं (2, 4) और भागफल के अन्तिम दो अंकों (6, 6) की तिरछी गुणा के गुणनफल (ऊर्ध्वतिर्यक सूत्र द्वारा)

$$\begin{bmatrix} 2 & & 4 & \\ & \times & & = 12 + 24 = 36 \\ 6 & & 6 & \end{bmatrix}$$

को (106—36 = 70) प्राथमिक भाज्य में से घटाते हैं जिससे हमें अगला मूल भाज्य 70 मिलता है।

चरण 4 : अब 70 को 8 से भाग करने पर 8 (भागफल का चौथा अंक) और 6 (शेषफल) मिलता है। अतः हमारा प्राथमिक शेषफल 69 होगा। क्योंकि हम शेषफल के प्रथम अंक (9) तक पहुँच गये हैं।

```
 24 )‾   7 1   4  2  6 : 9 5 :
 8          7 10 10  6   2 9
         ____________________
           8   6   6   8
```

चरण 5 : प्रथम विधि—

अब 69 में से ध्वजंक (2, 4) और भागफल के अन्तिम दो अंकों (6, 8) की तिरछी गुणा के गुणनफल

$$\begin{bmatrix} 2 & & 4 & \\ & \times & & = 16 + 24 = 40 \\ 6 & & 8 & \end{bmatrix}$$

को (69 —40 = 29) प्राथमिक शेषफल में से घटाने पर (29) अर्धसंशोधित शेषफल प्राप्त होता है।

भाज्य के अन्तिम अंक 5 से पहले शेषफल 29 को लिखने से हमें 295 मिलता है, जो हमारा इस पद का प्राथमिक शेषफल होता है।

अन्तिम शेषफल प्राप्त करने के लिए हमें भागफल के अन्तिम अंक 8 व आखिरी ध्वजंक को गुणा (8 × 4 = 32) करके गुणनफल 32 को प्राथमिक शेषफल 295 में से घटाते (295 — 32 = 263) है। अतः शेषफल 263 है।

अतः भागफल = 8668
शेषफल = 263

```
 2   4
   ×
 8   0   = 2 × 0 + 8 × 4 = 32
```

चरण 5 : द्वितीय विधि—बिन्दुओं के पास पहुँचते ही हम यह जानते हैं कि अब हमें शेषफल प्राप्त करना है। अत. यहाँ 695 प्राथमिक शेषफल होगा। अन्तिम शेषफल को प्राप्त करने के लिए चरण 5 में दिए गए दो पदों के स्थान पर हम शेषफल का संशोधन कार्य एक ही पद में भी कर सकते हैं। यहाँ संशोधन करने वाली संख्या पूर्व चरण तक प्राप्त भागफल के अन्तिम अंकों (इन अंकों की संख्या ध्वजंक में रखे गए अंकों के समान होगी।) व ध्वजंक के अंकों की ऊर्ध्वतिर्यक विधि से गुणा द्वारा प्राप्त की जाएगी। यहाँ प्रथम स्तम्भ को क्रमशः सभी स्तम्भों के साथ जोड़ते हुए सरलीकरण करते जाते हैं। परन्तु अन्तिम पदों में किए जाने वाले स्तम्भों का विलोपन कार्य हम नहीं करते हैं। (देखें अध्याय 8 व पुष्प–1 का अध्याय–10)

```
 2   4
 6   8
————————
 4 0 2
   3
————————
 4 3 2
```

अतः संशोधित अन्तिम शेषफल
$= 695 - 432 = 263$

यहाँ पर प्रथम स्तम्भ का ऊर्ध्व व दोनों स्तम्भों को तिर्यक गुणा ही करते हैं।

अन्तिम शेषफल को हम प्राथमिक शेषफल में से इस गुणनफल से घटाकर प्राप्त करते हैं।

टिप्पणी : इसी प्रश्न को वैदिक पद्धति में हम एक और विधि से भी कर सकते हैं। यदि हम 82 को प्रचालक संख्या के रूप में लें और मात्र 4 को ध्वजंक ले तो कार्य में सुगमता आ जाएगी। इस तरह से कार्य करने में हमें 82 के पहाड़े की मात्र 9 स्तर तक आवश्यकता पड़ेगी। जो कि वैदिक विधि द्वारा द्रुतगति से पहले ही लिखा जा सकता है। इस विधि से आप स्वयं इस प्रश्न को कर सकते हैं।

11·3·2 उदाहरण 5 : 16385 को 128 से भाग करो।

$$128\overline{)16385}$$

इस उदाहरण में हमने पाया कि ध्वजंक एक अंक का लेने से भाग करने में अधिक सुविधा रहती है।

चरण 1 :

```
   8)16385
12
```

चरण 2 :

```
   8)1638:5:
12
```

अंक 8 को ध्वजंक रूप में लेते हैं।

चरण 3 : 16 को 12 से भाग देने पर, 1 भागफल व 4 शेष रहता है

8)1 6 3 8 : 5 :
12　4
———————
1
———————

43 (प्राथमिक भाज्य) में से
−8=(8×1)
———————
35　संशोधित भाज्य
———————

चरण 4 : 35 को 12 से भाग देने पर 2 आता है ।

8)1 6 3　8 : 5 :
12　4 11
———————
1 2

118 (प्राथमिक भाज्य) में से
−16 =(2×8=16)
———
102　संशोधित भाज्य
———

चरण 5 : 102 को 12 से भाग करने पर, 8 भागफल व 6 शेष

8)1 6 3　8 : 5 :
12　4 11 6
———————
1 2 8
———————

65 (प्राथमिक शेषफल) में से
−64 =(8×8)
———
1　अन्तिम शेषफल=1
———

```
   8)16 3 8 : 5:
12     4 11 6
   ----------------
   1 2 8 : 1 :      अत: भागफल = 128
   ----------------        शेषफल = 1
```

11·4 : इस विधि में कभी-कभी ऐसी स्थिति आ जाती है कि प्राथमिक भाज्य, ध्वजंक और भागफल के अंकों की गुणन से बहुत छोटा बचता है। तब इस तरह के उदाहरणों में हम भागफल के उस अंक से छोटा भागफल अंक लेकर शेष विधि को दोहराते हैं। इस तरह पुन: भाग करने की स्थिति का हम वर्तमान विधि द्वारा भाग करने में भी प्रयोग करते हैं। यह स्थिति निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी। वैसे इस अवस्था में हम विनकुलम् का प्रयोग करके भाग सीधे ही कर सकते हैं। यह विधि पुष्प–3 में विस्तार से बताई जाएगी।

11·4·1 उदाहरण 6 : 601425 को 76 से भाग करो।

```
   6)6 0 1 4 2 : 5 :
  7  11   6 3 5
  ------------------
      7 9 1 3 : 37 :
  ------------------
```

यहाँ पर प्रथम भाग में ही 7 के स्थान पर 8 भागफल अंक ले सकते हैं लेकिन शेषफल 4 बचता है जो कि बहुत छोटा है, क्योंकि अगले चरण में हमें गुणन 48 और प्राथमिक भाज्य 41 मिलता है जिससे हमें ऋणात्मक संशोधित भाज्य प्राप्त होता, इसे भाग देने पर विनकुलम् रूप में कार्य करना होगा (पुष्प 3)। धनात्मक उत्तर के लिये हम भागफल 7 लेकर चलते हैं, शेषफल 11 को अगले अंक 1 से पहले लिखते हैं जिससे हमें 111 प्राथमिक भाज्य मिलता है, आदि।

11·4·2 उदाहरण 7 : 24829685 को 2365 से भाग करो।

चरण 1 : भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

```
   65)2 4 8 2 9 6 : 85 :
  23
```

यहाँ 23 (प्रचालक संख्या) और 65 (ध्वजंक) है।

अत: हम पूरा भाग 23 द्वारा करेंगे।

चरण 2 : 24 को 23 से भाग करने पर भागफल 1 (पहला अंक) और शेषफल 1 मिलता है।

$$\begin{array}{r} 65)\overline{24_1\ 8296:85:} \\ 22\qquad\qquad \\ \hline 1\qquad\qquad \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ & \times \\ 0 & 1 \end{array} = 6\times1+5\times0 = 6$$

अब प्राथमिक भाज्य 18 है।

ध्वजंक का पहला अंक 6 और भागफल के गुणनफल $(6\times1=6)$ को प्राथमिक भाज्य 18 में से घटाने $(18-6=12)$ पर संशोधित भाज्य 12 मिलता है।

चरण 3 : अब भाज्य 12 को 23 से भाग करने पर हमें ज्ञात होता है कि भाज्य 12 भाजक 23 से छोटा होने के कारण अगले चरण के लिए शेषफल हो जाता है और भागफल 0 मिलता है।

$$\begin{array}{r} 65)\overline{24_1\ 8\ {}_{12}2\ 96:85} \\ 23\qquad\qquad \\ \hline 1\ 0\qquad \\ \hline \end{array}$$

अतः अब प्राथमिक भाज्य 122 है।

अब 122 में से ध्वजंक (6, 5) और भागफल के दोनों अंकों (1, 0) की तिरछी गुणा $\left[\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ & \times \\ 1 & 0 \end{array} = 5\right]$ को घटाने पर $(122-5=117)$ संशोधित भाज्य 117 मिलता है।

चरण 4 : 117 को 23 से भाग करने पर 4 (भागफल का तीसरा अंक) और शेषफल (25) मिलता है, अतः 259 हमारा अगला प्राथमिक भाज्य होगा।

$$\begin{array}{r} 65)\overline{2\,4\ \ 8\ \ 2\ \ 96:85:} \\ 23\qquad 1\ 12\ 25\qquad \\ \hline 1\ 0\ 4\qquad \\ \hline \end{array}$$

अब ध्वजंक (6, 5) और भागफल के अन्तिम दो अंकों (0, 4) की तिरछी गुणा $\left[\begin{array}{cc} 6 & 5 \\ & \times \\ 0 & 4 \end{array} = 24\right]$ को $(259-24=235)$ घटाने पर संशोधित भाज्य 235 मिलता है।

चरण 5 : पुनः 235 को 23 से भाग करने पर (भागफल का चौथा अंक) 9 और (शेषफल) 28 मिलता है। अतः 286 हमारा अगला प्राथमिक भाज्य है। (यहाँ हम 10 भागफल नहीं लेंगे) वरना विनकुलम् रूप में कार्य करना होगा। (देखें पुष्प 3)

```
   65)2 4 8  2  9  6 : 8 5 :
23       1 12 25 28
   ------------------------
         1 0  4  9
   ------------------------
```

अब फिर 286 में से ध्वजंक (6, 5) और भागफल के अन्तिम दो अंकों (4, 9) की तिरछी गुणा $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ & \times & = 54 + 20 = 74 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ को घटाने पर (286—74 212) संशोधित भाज्य 212 मिलता है।

चरण 6 : फिर से 212 को 23 से भाग करने पर 8 (भागफल का पांचवां अंक) और 28 शेषफल मिलता है। अतः 288 प्राथमिक शेषफल होगा।

```
   65)2 4  8  2  9  6 : 85 :
23     1 12   25 28
   ------------------------
       1 0 4 9   8 :
```

फिर से 288 में से ध्वजंक (6, 5) और भागफल के अन्तिम दो अंकों की तिरछी गुणा $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ & \times & = 45 + 48 = 93 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ को घटाने पर (288 − 93 = 195) 195 मिलता है, जिसे भाज्य के अन्तिम अंक 5 के पहले लिखते हैं। अब हमें 1955 मिलता है जो अल्प संशोधित शेषफल है।

अतः अन्तिम शेषफल प्राप्त करने के लिए हमें अल्प संशोधित शेषफल 1955 में से ध्वजंक का आखिरी अंक 5 और भागफल का आखिरी अंक 8 की ऊर्ध्व गुणन (5×8=40) को घटाने (1955—40=1915) से 1915 मिलता है। जो अन्तिम शेषफल है।

$$\begin{array}{l} 65)\overline{24\,{}_1{}^8 12\,{}^2 25\,{}^9 28\,{}^6 28 : {}^8\,{}_{195}{}^5 :} \\ 23 \\ \hline \quad 10498/1915 \\ \hline \end{array}$$

अतः भागफल $=10498$
शेषफल $=1915$

```
6   5
  ×
8   0    8×5+6×0=40
```

इसके अतिरिक्त सीधे ही ऊर्ध्व विधि से गुणा करने पर हमें मिला है। अन्तिम

```
 6 5          शेषफल=2885−970=1915 उत्तर
 9 8          भागफल=10498
-----
9 3 0
  4
-----
9 7 0
```

टिप्पणी : 1. इसी प्रश्न को हम 236 की प्रचालक संख्या व 5 को ध्वजांक के रूप में लेकर भी भाग कर सकते हैं। 236 का पहाड़ा तो द्रुतगति से वैदिक विधि द्वारा लिख लेंगे।

2. अभ्यास के बाद यह सारा कार्य मात्र मानसिक गणना द्वारा, सीधा ही एक पंक्ति में कर सकना भी संभव हैं।

11·4 3 उदाहरण 8 : 26786 को 114 से भाग करो।

```
   114)26786
 11 4)2678 : 6:
        46  12
 ----------------
       234 : 110 :
```

अतः भागफल $=234$
शेषफल $=110$

तीसरे चरण में हम 5 भागफल नहीं लेंगे।

11·4·4 उदाहरण 9 : 342945 को 136 से भाग दो।

```
   136)342945
     6)34294 : 5:
 13     8539
 ----------------
       2521 : 89
```

अतः भागफल $=2521$
शेषफल $=89$

11·5 दशमलव रूप : परिणाम दशमलव रूप में प्राप्त करने के लिए हम वैदिक ध्वजक विधि का प्रयोग कर सकते हैं। इसमें हमें शेषफल को भी पुनः उसी विधि द्वारा भाग करते रहना है और भाज्य में अतिरिक्त शून्य लगा देते हैं। निम्नलिखित उदाहरणों से विधि स्पष्ट हो जाएगी।

11·5·1 उदाहरण 10 : 8352 को 79 से भाग करके परिणाम दशमलव के 3 अंकों तक लिखो।

```
  9)8 3 5 : 2 0 0 0
 7    1 4 10 8 3
 ________________
      1 0 5 . 7 2 1
```

भाग करने की विधि वही है जो ऊपर दिए गए उदाहरणों में बताई है। हम शेषफल को भाग करना शुरू करते ही परिणाम में दशमलव लगाते हैं।

11·5·2 उदाहरण 11 : 711·023 को 38 से दशमलव के 3 स्थानों तक भाग करो।

```
  8)7 1 1 · 0 2 3
 3    4 9 6 1 1
 ______________
      1 8 · 7 1 1
```

11·5·3 उदाहरण 12 : 221 को 52 से दशमलव के 3 स्थानों तक भाग करो।

```
  2)2 2 1 · 0 0
 5    2 3 · 1
 ____________
        4 · 2 5 0
```

11·5·4 उदाहरण 13 : 7·5 को 54 से दशमलव के 5 स्थानों तक भाग करो।

```
  4) 7 · 5 0 0 0 0
 5     2 6 8 8 8 8
 ________________
       · 1 3 8 8 8
```

यहाँ भी दूसरे चरण में हम मात्र 3 से ही भाग देंगे व शेष चरणों में हर बार 8 से ही भाग देंगे।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित को भाग करो—

(i) 48986 ÷ 83

(ii) 60998 ÷ 65

(iii) 1638467 ÷ 138

(iv) 8956425 ÷ 78

प्रश्न 2. (i) 8475 को 65 से भाग करके परिणाम दशमलव के 3 स्थान तक निकालो।

(ii) 750·2532 को 781 से भाग करके परिणाम दशमलव के 4 स्थान तक निकालो।

(iii) 80·23 को 243 से भाग करके परिणाम दशमलव के 5 स्थान तक निकालो।

अध्याय-12

भाग की जाँच

12·1 परिचय : गुणा की वैदिक जाँच विधि को भाग के परिणामों की जाँच के लिए भी प्रयोग कर सकते हैं। भाग की जांच करने की विधि को हम बीजगणितीय भाग के परिणामों की शुद्धता की जाँच के लिए भी प्रयोग कर सकते हैं। यह विधि उन उदाहरणों में भी प्रयोग कर सकते हैं, जिनमें भाग करने पर शेषफल मिलता है।

12·2 विधि : भाग की वैदिक जाँच विधि दो प्रकार से प्रयोग की जा सकती है (वैदिक जाँच विधि) जो कि सरल व सही है और द्रुतगति से होती है। निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

12·2·1 उदाहरण 1 : 46956 को 65 से भाग करो।

साधारण विधि द्वारा भाग करने से हमें परिणाम दो पंक्तियों में मिल जाता है (अध्याय 11)। प्राप्त भागफल 722 और शेषफल 26 है।

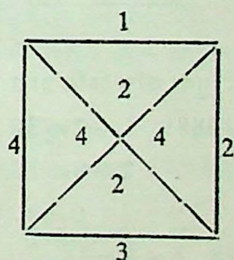
प्रथम विधि :

चरण 1 : सबसे पहले शेषफल (26) को भाज्य (46956) में से घटाते (46956 —26 = 46930) है। शेषफल घटाने से जो परिणाम मिलता है वही पूर्ण भाज्य होता है। अतः 46930 पूर्ण भाज्य है।

चरण 2 : यदि हम परिणाम की शुद्धता की जांच करना चाहते हैं तब हमें यह देखना है कि (चरण 1) द्वारा प्राप्त पूर्ण भाज्य, भागफल और भाजक की गुणा के बराबर है या नहीं। यदि है तो यह इस बात का द्योतक है कि परिणाम सही है।

अतः

$$\begin{array}{r} 722 \\ \times 65 \\ \hline 46930 \end{array}$$



चरण 3 : इस स्थिति में यह उदाहरण बिल्कुल उसी प्रकार है जिस प्रकार हम दो संख्याओं की गुणा की जाँच करते हैं। अतः गुणा की जाँच विधि सीधे ही प्रयोग कर सकते हैं।

722; $7+2=9$; $9+2=11$, $1+1=2$ [त्रिभुज 1 में लिखो]

65; $6+5=11$; $1+1=2$ [त्रिभुज 3 में लिखो]

अतः त्रिभुज 2 में $2\times2=4$ (त्रिभुज 1 व 3 के अंकों का गुणनफल)

46930; $4+6=10$, $1+0=1$; $1+9=10$, $1+0=1$; $1+3=4$ (त्रिभुज 4)

अतः त्रिभुज 2 व त्रिभुज 4 में प्राप्त अंक समान है।

$4 = 4$

परिणाम सही है।

नोट : एक और विधि दूसरे उदाहरण में दी जा रही है।

12·2·2 उदाहरण 2 : 876456 को 68 से भाग करो।

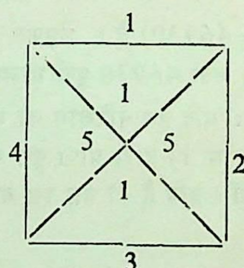
वैदिक साधारण भाग विधि का प्रयोग करने से हमें भागफल 12889 और शेषफल 4 मिलता है।

प्रथम विधि :

चरण 1 : शेषफल को भाज्य में से घटाने पर ($876456-4=876452$) पूर्ण भाज्य मिलता है।

चरण 2 : पूर्ण भाज्य = भागफल × भाजक

$$\begin{array}{r} 12889 \\ \times 68 \\ \hline 876452 \\ \hline \end{array}$$



चरण 3 : गुणा जाँच विधि द्वारा

(अ) 12889, $1+2=3$; $3+8=11$, $1+1=2$; $2+8=10$, $1+0=1$; $1+9=10$, $1+0=1$ (त्रिभुज 1)

(ब) 68, $6+8=14$, $1+4=5$ (त्रिभुज 3);

(स) 876452, $8+7=15$, $1+5=6$;
$6+6=12$, $1+2=3$; $3+4=7$;
$7+5=12$, $1+2=3$;
$3+2=5$ (त्रिभुज 4)

चरण 4 : अत: $5=5$ परिणाम सही है।

द्वितीय विधि : इसके अतिरिक्त हम शेषफल वाले प्रश्नों की सीधे ही निम्नलिखित चरणों द्वारा भी जाँच कर सकते हैं।

चरण 1 : प्रथम भाजक को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करो।
भाजक 68; $6+8=14$, $1+4=5$

चरण 2 : भागफल को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करते हैं।
भागफल 12889 $1+2=3$; $3+8=11$, $1+1=2$;
$2+8=10$, $1+0=1$; $1+9=10$,
$1+0=1$

चरण 3 : ऊपर प्राप्त दोनों एक अंकीय संख्याओं को गुणा करो, व गुणनफल को एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करो। $5\times1=5$

चरण 4 : शेषफल को भी एक अंकीय संख्या में बदलो।
शेषफल$=4$

चरण 5 : चरण 3 व 4 से प्राप्त संख्याओं को जोड़कर एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करो।

$$5 + 4 = 9$$

चरण 6 : अब भाज्य को भी एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करें।
भाज्य 876456; $8+7=15$, $1+5=6$;
$6+6=12$, $1+2=3$;
$3+4=7$; $7+5=12$,
$1+2=3$; $3+6=9$;

चरण 7 : जाँच चरण 5 व 6 में प्राप्त संख्यायें बराबर होनी चाहिए। अतः $9=9$ परिणाम सही है।

दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि हर स्तर पर एक अंकीय संख्या में परिवर्तित करते हुए हम देखें तो भाज्य$=$भाजक $\times$ भागफल$+$शेषफल

टिप्पणी : थोड़े से अभ्यास के बाद यह वैदिक जांच का कार्य कुछ क्षणों में सीधे ही किया जा सकता है।

12·3 बीजगणितीय भाग : बीजगणितीय भाग की शुद्धता की जाँच करने के लिए भी यही सूत्र गुणित समुच्चय (क्रमांक 15) प्रयोग किया जाता है। अतिरिक्त चरण यह है कि बीजगणितीय समीकरणों को अंकों में परिवर्तित करना पड़ता है। इसका विस्तार अगले अध्याय 13 में दिया जायेगा।

अभ्यास :

प्रश्न 1. वैदिक विधि से अध्याय 9, 10 व 11 के प्रश्नों के परिणामों की जाँच करो।

प्रश्न 2. वैदिक जाँच द्वारा बताइए कि परिणाम सही/गलत है।

(i) $9)\overline{12000212} = 133356/8$ (भागफल/शेषफल)

(ii) $8888)\overline{101020} = 12/3252$

(iii) $88987)\overline{1030007} = 10/40237$

(iv) $23)\overline{1011} = 43/22$

(v) $7989)\overline{10102} = 1/2913$

अध्याय-13

बीजगणितीय भाग

13·1 परिचय : भाग के बीजगणितीय प्रश्नों में भी हम वैदिक सूत्र परावर्त्य योज्येत (क्रमांक 4) का प्रयोग करते हैं जिसका अर्थ है "चिन्ह परिवर्तन करके प्रयोग करें।" बीजगणितीय समीकरणों को भी वैदिक विधि द्वारा उसी तरह भाग किया जाता है, जिस प्रकार अंकगणितीय भाग, जिसका अध्याय 10 में विधि सहित वर्णन किया गया है। निम्नलिखित उदाहरणों से हमें दोनों अध्यायों में समानता और असमानता का ज्ञान हो जाएगा।

13·2 प्रकार 1 : इकाई गुणांक : सबसे पहले उन बीजगणितीय समीकरणों को भाग करेंगे जिसमें भाजक के पहले पद का गुणांक इकाई (1) है।

13·2·1 उदाहरण 1 : $9क^2 - 12क - 42$ को $क - 1$ से भाग करो।

चरण 1 : भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं।

$$क - 1 \overline{)\; 9क^2 - 12क - 42}$$

चरण 2 : भाजक के पहले पद का गुणांक 1 है अतः उसे छोड़कर शेष भाजक को चिन्ह परिवर्तित करके संशोधित करेंगे। अतः संशोधित भाजक +1 होगा।

$$\begin{array}{l} क - 1 \overline{)\; 9क^2 - 12क - 42} \\ \quad +1 \end{array}$$

(अ) यहाँ भाजक में क की महत्तम घात 1 है तो शेषफल में $(1 - 1 = 0)$ शून्य घात होगी यानि क की घात वाला कोई पद नहीं होगा, केवल कोई पूर्णांक ही प्राप्त होगा। अब हम भाज्य में उस पद के बाद एक तिरछी रेखा खींचते हैं जिसकी घात भाजक की अधिकतम घात के बराबर है। इस रेखा के दायीं ओर शेषफल होगा।

$$\begin{array}{l} क - 1 \overline{)\; 9क^2 - 12क / - 42} \\ \quad +1 \end{array}$$

चरण 3 : शेष चरण अध्याय 10 के समान है। हम भाज्य के प्रथम पद के गुणांक को संशोधित भाजक के अंक से गुणा करके $(9 \times 1 = 9)$ अगले पद के नीचे लिखेंगे। अतः 9 को पद -12 क के नीचे रखेंगे।

क—1)‾ 9क^2—12क/—42
+1 +9

9

(आ) अगला गुणांक प्राप्त करने के लिए इस स्तम्भ को जोड़ते हैं।
(—12+9=—3) अत: अगला गुणांक —3 होगा।

चरण 4 : अब हम फिर से गुणांक (—3) को संशोधित भाजक (1) से गुणा करके अगले पद (42) के नीचे रखते हैं।

क—1)‾ 9क^2—12क/—42
+1 9 — 3

9 — 3 /

(अ) हम फिर अगले स्तम्भ को जोड़ते हैं। (—42+(—3)=—45 इस विधि को तब तक दोहराते हैं जब तक कि अन्तिम पद तक न पहुँच जाए।

क—1)‾ 9क^2—12क/—42
9 — 3

9 — 3/—45

चरण 5 : अब क की घात में से भाजक के क की महत्तम घात को घटाते हैं और उसे क्रम से गुणांक के साथ रखते हैं।

अत: क—1)‾ 9क^2—12क/—42
9 — 3

9क— 3 / —45

भागफल 9क—3, शेषफल=—45

13·2·2 उदाहरण 2 : 5क^2+20क+14 को क—2 से भाग दो।

चरण 1 : भाजक तथा भाज्य को निम्नलिखित रूप में लिखो।

क—2)‾ 5क^2+20क+14

चरण 2 : संशोधित भाजक (+2) होगा और पद 20क के बाद भाज्य में तिरछी रेखा खींचते हैं।

क—2)‾ 5क^2+20क/+14
+2 10

5

चरण 3 : संशोधित भाजक के अंक (+2) को भाज्य के प्रथम पद के गुणांक (5) से गुणा करके अगले पद 20क के नीचे लिखते हैं।

(अ) अब इस पंक्ति को जोड़ते हैं जिससे हमें अगला गुणांक प्राप्त होता है। (20+10=30)

$$\begin{array}{l|lll} क-2 & 5क^2 & +20क/ & +14 \\ +2 & & 10 & \\ \hline & 5 & +30 & \end{array}$$

चरण 4 : दोबारा गुणांक (30) को भाजक (2) से गुणा करके अगले पद (14) के नीचे लिखते हैं।

$$\begin{array}{l|lll} क-2 & 5क^2 & +20क/ & +14 \\ +2 & & 10 & 60 \\ \hline & 5 & +30/ & \end{array}$$

(अ) अब अगली पंक्ति को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{l|lll} क-2 & 5क^2 & +20क/ & +14 \\ +2 & & 10 & 60 \\ \hline & 5 & +30/ & 74 \end{array}$$

चरण 5 : अब क की घात में से भाजक की महत्तम घात को घटाते हैं और उसे गुणांक के साथ लिखते हैं।

$$\begin{array}{l|lll} क-2 & 5क^2 & +20क/ & +14 \\ & & 10 & 60 \\ \hline & 5क & +30/ & 74 \end{array}$$

अतः भागफल $=5क+30$

शेषफल $=74$

13·2·3 उदाहरण 3 : $क^3-3क+15$ को $क+2$ से भाग दो।

$$क+2)\overline{\;क^3-3क\;/\;+15}$$

$$\begin{array}{l|llll} क+2 & क^3 & -0क^2 & -3क/ & +15 \\ -2 & & -2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & +1/ & 13 \end{array}$$

$क^2-2क+1\;/\;13$

अतः भागफल $=क^2-2क+1$, शेषफल $=13$

नोट :—यहाँ भाज्य में पद $क^2$ नहीं था अतः भाग करते समय पद $0क^2$ को भाज्य में जोड़ना आवश्यक है और शेष विधि समान रहेगी।

13·2·4 उदाहरण 4 : $3क^4 - 2क^3 - 3क - 2$ को $क^2 + 1$ से भाग करो।

$$
\begin{array}{lllllll}
क^2 + 0क + 1 & / & 3क^4 - 2क^3 + 0क^2 & / & -3क - 2 \\
0 \quad -1 & & 0 \quad -3 & & \\
 & & \quad\quad 0 & & 2 \\
 & & & & 0 \quad 3 \\
\hline
 & & 3 \quad -2 \quad -3 & / & -1 \quad 1
\end{array}
$$

$3क^2 - 2क - 3 \; / \; -क + 1$

अतः भागफल $= 3क^2 - 2क - 3$

शेषफल $= -क + 1$

नोट 1 :—यहाँ पर महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि हम शेषफल में क की घातों को संशोधित नहीं करेंगे।

नोट 2 :—इस प्रश्न में भाजक तथा भाज्य में 0क तथा $0क^2$ पद जोड़े गए हैं, क्योंकि ये पद क्रमशः भाजक तथा भाज्य में अनुपस्थित थे।

13·3 प्रकार 2 : पहले दिए गए सभी उदाहरणों में भाजक के पहले पद का गुणांक इकाई (1) ही था परन्तु साधारण स्थिति में भाजक के पहले पद का गुणांक 1 के अतिरिक्त कुछ भी हो सकता है, तब हमें भाजक को ऐसी संख्या से भाग करना पड़ेगा जिससे भाजक के पहले पद का गुणांक 1 हो जाए। संशोधित भाजक से भाग करने पर जो भागफल मिलेगा उसे भी हमें उसी संख्या से भाग करना होगा। लेकिन शेषफल वैसा ही रहेगा। शेष विधि समान है। अब हम एक उदाहरण इस प्रकार का करेंगे। ध्यान दें कि इसमें हम अनुरूपेण उपसूत्र का प्रयोग करेंगे।

13·3·1 उदाहरण 5 : $2क^3 - 5क^2 + 8क - 10$ को $2क - 4$ से भाग करो।

$$
\begin{array}{llll}
2/2क - 4\;) & 2क^3 - 5क^2 + 8क & / & -10 \\
क - 2 & \quad\quad 4 & & \\
\;\; +2 & \quad\quad\quad\quad -2 & & \\
 & & / & 12 \\
\hline
 & 2 \; - 1 + \; 6 & / & 2
\end{array}
$$

$2 \; / \; 2क^2 - क + 6 \; / \; 2$

$क^2 - \frac{1}{2}क + 3 \; / \; 2$

अतः भागफल $= क^2 - \frac{1}{2}क + 3$

शेषफल $= 2$

शेषफल को संशोधित नहीं करेंगे।

13·4 टिप्पणी :

(1) सामान्य विधि द्वारा भाग करने की अपेक्षा वैदिक विधि द्वारा भाग करने में त्रुटियाँ कम होने की सम्भावना रहती है।

(2) यहाँ ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि जो शेषफल प्रमेय हमें बीजगणित में पढ़ायी जाती है उससे हमें बीजगणितीय समीकरण का शेषफल ही मिलता है। परन्तु परावर्त्य विधि इससे बहुत आगे है, इससे हमें भागफल तथा शेषफल दोनों ही प्राप्त हो जाते हैं।

(3) इसके अतिरिक्त वैदिक गणित में जाँच की एक ही वैदिक विधि द्वारा हम (बीजगणितीय तथा अंकगणितीय) दोनों तरह के भाग के परिणामों की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं।

13·5 बीजगणितीय भाग शुद्धता : बीजगणितीय भाग की शुद्धता की जाँच करने के लिए भी गुणित सूत्र (क्रमांक 15) प्रयोग किया जाता है। अतिरिक्त चरण यह है कि बीजगणितीय समीकरणों को अंकों में परिवर्तित करना पड़ता है (अध्याय 12)।

चरण 1 : पहले क का मान 1 निर्धारित करते हैं फिर क के निर्धारित मान को सभी बीजगणितीय समीकरणों में रखते हैं और उन्हें हल करते हैं। ये चार समीकरण हैं (1) भाजक (2) भाज्य (3) भागफल और (4) शेषफल।
चरण 2 : जब हमें एक अंकीय मान मिल जाता है तो शेष विधि वही रहती है जो अध्याय 12 में बताई है।

13·5·1 उदाहरण 6 : $5क^4+7क^3-3क^2+15क+24$ को $क^2-2क+3$ से भाग करो।

परावर्त्य विधि द्वारा भाग करने से भागफल $5क^2+17क+16$ और शेषफल $-4क-24$ मिलता है।

चरण 1 : सभी समीकरणों में $क=1$ रखने पर एक अंकीय मान निकालते हैं।

(1) भाजक $क^2-2क+3=1-2+3=2$

(2) भाज्य $5क^4+7क^3-3क^2+15क+24$

$=5+7-3+15+24$

भाज्य $=48$

(3) भागफल $5क^2+17क+16$

$=5+17+16=38$

शेषफल $-4क-24$

$=-4-24=-28$

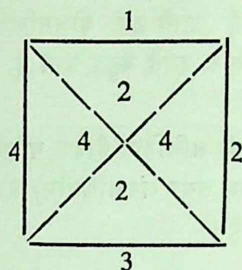
चरण 2 : पूर्ण भाज्य = भाज्य — शेषफल

$= 48 - (-28)$

$= 48 + 28 = 76$

चरण 3 : पूर्ण भाज्य = भागफल × भाजक

```
 38
  2
----
 76
----
```



$2 \times 2 = 4$

चरण 4 : गुणा की जांच विधि द्वारा

(1) 38, $3+8=11$, $1+1=2$ (त्रिभुज 1)

(2) $2=2$ (त्रिभुज 3)

$2 \times 2 = 4$ (त्रिभुज 2)

(3) 76, $7+6=13$, $1+3=4$ (त्रिभुज 4)

चरण 5 : अतः $4=4$ परिणाम सही है।

द्वितीय विधि : चरण 1 : चरण 1 व 2 से प्राप्त एक अंकीय अंक को गुणा करने पर $2 \times 2 = 4$

चरण 2 : शेषफल को एक अंकीय अंक में परिवर्तन करके $\bar{1}$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : $4 + \bar{1} = 3$

चरण 4 : भाज्य को एक अंक में परिवर्तित करने पर 3 मिलता है।

चरण 5 : अतः $3=3$ परिणाम सही है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित को परावर्त्य विधि का प्रयोग करते हुए भाग करे।

(i) $(4क^3 - 7क^2 - 7क + 12)$ को $(क - 4)$ से भाग करो।

(ii) $(3क^2 - क - 5)$ को $(3क - 7)$ से भाग करो।

(iii) $(2क^5 - 9क^4 + 5क^3 + 16क^2 - 16क + 36)$ को $(2क^2 - 3क + 1)$ से भाग करो।

(iv) $(क^4 - 4क^2 + 12क - 9)$ को $(क^2 + 2क + 3)$ से भाग करो।

(v) $(16क^4 + 36क^2 + 16क + 9)$ को $(4क^2 - 2क + 9)$ से भाग करो।

(vi) $(क^5 + क^3 - 7क^2 + 9)$ को $(क^3 - 2क^2 + 2क - 3)$ से भाग करो।

(vii) $(21क^6 + 7क^5 + 21क^3 + क^2 + 15क + 3)$ को $(3क^3 + क^2 + 3)$ से भाग करो।

प्रश्न 2. निम्नलिखित का (शेषफल व भागफल) परावर्त्य विधि का प्रयोग करते हुए लिखिए।

(i) $(क^4 - 3क^3 + 7क^2 + 5क + 7) \div (क - 4)$;
भागफल = ? शेषफल = ?

(ii) $(6क^4 + 13क^3 + 39क^2 + 37क + 45) \div (क^2 - 2क - 9)$
भागफल = ? शेषफल = ?

(iii) $(2क^4 - 3क^3 + 3क - 2) \div (क^2 + 1)$
भागफल = ? शेषफल = ?

प्रश्न 3. वैदिक गणित की जाँच पद्धति द्वारा सभी प्रश्नों की जाँच करें।

अध्याय-14

विविध विधियाँ

14·1 संख्याएँ : वैदिक गणित में प्रत्येक कार्य को करने के लिए एक से अधिक विधियाँ उपलब्ध है। यह विशेषता गणित जैसे शुष्क विषय को भी एक खेल के समान रुचिकर एवं प्रिय विषय बना देती है, जिसे विद्यार्थी मुस्कराते हुए सीखते है।

संख्याओं को प्रयोग करते हुए भी हमें चयन करना होता है कि हम या तो सीधे ही सभी अंकों का या फिर उसके पूरक अंकों का प्रयोग करें।

वैदिक गणित में प्रारम्भ से ही हम अंकों को दो रूपों में सीखते हैं। प्रत्येक अंक का दूसरा रूप उसके पूरक अंक के रूप में भी होता है। उदाहरणतया अंक 8 का पूरक अंक 2 है। क्योंकि अंक 8 दशमलव पद्धति के आधार 10 से 2 छोटा है। इसी प्रकार 6 का पूरक अंक 4, 9 का पूरक अंक 1, 3 का पूरक अंक 7 व 2 का पूरक अंक 8 है। छोटे बच्चों को आरम्भ से ही पूरक अंकों का ज्ञान बड़ी सरलता से 10 मोतियों की एक लड़ी द्वारा सिखाया जा सकता है। पहली कक्षा में ही बच्चों को हम यह भी बता सकते हैं कि पूरक अंक को छत (बार) वाले अंक के रूप में लिखते हैं तथा प्रत्येक छत वाला अंक ऋणात्मक अंक होता है जबकि साधारण अंक (बिना छत वाला) धनात्मक होता है। ऋणात्मक अंक अपनी ओर से दिए जाने वाली (देय) वस्तु के तुल्य है। व धनात्मक अंक दूसरों से प्राप्त करने वाली वस्तु के तुल्य है। पूरक अंकों का प्रयोग करने से संख्याएँ विनकुलम् रूप में परिवर्तित हो जाती है।

उदाहरणतया $9 = 10 - 1 = 1\bar{1}$

$8 = 10 - 2 = 1\bar{2}$

$19 = 20 - 1 = 2\bar{1}$ आदि (देखें पुष्द—1 अध्याय 8)

विनकुलम् रूप का ज्ञान भी दूसरी कक्षा से दिया जा सकता है। पुनः हम 19 के स्थान पर $2\bar{1}$ का प्रयोग कर सकते हैं। जो कि अधिक सरल व द्रुत गति से प्रयुक्त होने वाला है व इसमें त्रुटियों की संभावनाऐं कम रहती हैं। क्योंकि हर कार्य में हमें 9 के स्थान पर $\bar{1}$ का ही प्रयोग करना होगा। संख्याओं को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करके व विनकुलम् संख्या को साधारण रूप में परिवर्तित करके हम इस परिवर्तन की जांच भी सरलता से कर सकते हैं। (देखें अध्याय—3)

14·2 जोड़ : 8 को 9 में जोड़ने के लिये हम या तो सामान्य तरीके से या फिर 8 में 9 के पूरक अंक ($1\bar{1}$) जोड़ें। हमें प्राप्त होता है $8 + \bar{1} = 7$ (इकाई अंक) और

17 हमारा उत्तर है। इसी प्रकार हमें 7 को 8 में जोड़ने के लिए 8 के पूरक अंक (1$\bar{2}$) का प्रयोग करने से प्राप्त होता है $7+\bar{2}=5$ (इकाई अंक) और 15 परिणाम है। छोटे बच्चों को 8 में 9 जोड़ने की अपेक्षा 8 में से 1 घटाना ज्यादा सरल लगेगा। (देखें पुष्प—1 का अध्याय—3) इस प्रकार जब भी हम पूरक अंक का प्रयोग करते हैं, तो शुद्धाः का प्रयोग करके उच्च स्तर पर 1 हासिल ले जाते हैं या उसी अंक पर शुद्धाः का बिन्दु लगा देते हैं।

14·3 घटाना : घटाने वाली संख्या के सभी अंकों पर बार (छत) लगाने से घटा के प्रश्न में ऊपर वाली संख्या के सभी अंकों में जोड़ना होता है। इस विधि में हमें पुष्प—1 में पढ़ाई गई शुद्धिकरण विधि को अधिकतर, प्रयोग करने का आवश्यकता नहीं रहती है।

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 7\ 4 \\ -1\ 4\ 5\ 5 \\ \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 2\ 7\ 4 \\ =\bar{1}\ \bar{4}\ \bar{5}\ \bar{5} \\ \hline 2\ \bar{2}\ 2\ \bar{1} \\ \hline \end{array} \; =1819$$

इसके अतिरिक्त दो और विधियाँ भी उपलब्ध है (देखें पुष्प—1 अध्याय 2)

14·4 गुणा : दो संख्याओं को गुणा करने के लिए वैदिक गणित में हमें एक साथ कई विधियाँ उपलब्ध हैं। यह विशेषता गणित को खेल जैसा मनोरंजक विषय बना देती है। बच्चों को खेल प्रिय होते हैं। जिसके साथ भी हम खेल खेलते हैं, वह मित्र बन जाता है। और फिर मित्र से डर या भय का प्रश्न ही नहीं रहता है।

इस प्रकार वैदिक गणित का अध्ययन करने से गणित जैसा शुष्क व उबा देने वाला विषय भी विद्यार्थियों के लिए रुचिकर व आनन्ददायी विषय बन जाता है, जिसे बच्चे मुस्कराते हुए रुचि के साथ सीखते हैं।

उदाहरणतया : गुणा करें। 89×99

इस प्रश्न को हम 11 विभिन्न विधियों से कर सकते हैं।

(i) एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र का प्रयोग करने से हम आसानी से इसका हल निकाल सकते हैं। (देखें पुष्प—1 का अध्याय 7)

$89 \times 99 = 89-1/99-88 = 88/11 = 8811$

(ii) यहाँ निखिलम् सूत्र का भी हम सरलता से प्रयोग कर सकते हैं।

$$\begin{array}{l} 89-11 \\ 99-01 \\ \hline 88\ /\ 11 \;=8811 \\ \hline \end{array}$$

यहाँ पर हम बांए भाग का परिणाम चार विभिन्न विधियों द्वारा प्राप्त कर सकते है (पुष्प—1, अध्याय 5)

(iii) उर्ध्व सूत्र के प्रयोग से हम दांए से बांए गुणा करने पर परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। (देखें पुष्प—1 अध्याय 10)

8 9
9 9

$^{88}/_{16}\ ^{1}/_{8}\ ^{1} \quad = 8811$

यह विधि कठिन है और वैदिक गणित का विद्यार्थी इस विधि का कभी प्रयोग नहीं करेगा। लेकिन रोचक तथ्य यह है कि यह विधि आजकल हमें पढ़ायी जाने वाली विधि के बहुत समीप है।

(iv) उर्ध्व सूत्र को हम बांए से दांए गुणा करने के लिये भी प्रयोग कर सकते हैं। और परिणाम दो चरणों में आ जाता है।

8 9
9 9

---

7 2 / 3 / 1
1 5 8

---

8 8 1 1 = 8811

(v) थोड़े से अभ्यास के बाद हम परिणाम बांए से दांए गुणा करने पर भी एक ही पंक्ति में प्राप्त कर सकते हैं।

इसमें हम हासिल दांयी ओर ले जाते हैं यह पांचवी विधि है इसमें हम क्रमांक (X) विधि में दिये गये चरणों का प्रयोग करते हैं।

(vi) यदि हम दी हुई संख्या को विनकुलम् रूप में परिवर्तित कर ले और तब उर्ध्व सूत्र का प्रयोग करें तो यह अधिक सरल होगा। (देखें अध्याय 1 व 8)

$89 \rightarrow 1\,\bar{1}\,\bar{1}$ (दांए से बांए)
$99 \rightarrow 1\,0\,\bar{1}$

$1 / \bar{1} / \bar{2} / 1 / 1 \quad = 1\bar{1}\bar{2}11 = 8811$

एक रोचक तथ्य यह है कि विनकुलम् रूप में गुणा करने पर हमें एक भी दहाई अंक प्राप्त नहीं होता है। और कार्य बहुत सरलता व गति से होजाता है।

(vii) संख्याओं को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करने के बाद हम उर्ध्व सूत्र का प्रयोग बांए से दांए भी उसी सरलता से कर सकते हैं।

$$1\ \bar{1}\ \bar{1}$$
$$1\ 0\ \bar{1}$$

$$1 / \bar{1} / \bar{2} / 1 / 1 \quad = 1\ \bar{1}\ \bar{2}\ 1\ 1 = 8811$$

(viii) निखिलम् विधि का उपयोग हम दी हुई संख्याओं को विनकुलम् रूप में परिवर्तित करने के उपरान्त भी कर सकते हैं।

$$1\ \bar{1}\ \bar{1} + \bar{1}\ \bar{1}$$
$$1\ 0\ \bar{1} + 0\ \bar{1}$$

$$1\ \bar{1}\ \bar{2} / 1\ 1 \quad = 1\ \bar{1}\ \bar{2}\ 1\ 1 = 8\ 8\ 1\ 1$$

यहाँ निखिलम् विधि में बांया उत्तर प्राप्त करने के लिये चार विधियाँ उपलब्ध है।

अन्य विधियाँ : वैदिक पद्धति में विनकुलम् रूप की संख्याओं का अभ्यास होने के बाद हम छठी व सांतवी विधियों में उत्तर को सीधा ही साधारण रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार अन्त में दो चरणों की आवश्यकता नहीं पड़ती।

(ix) उर्ध्व विधि को दांए से बांए प्रयोग करने पर

$$8\ 9 - 1\ \bar{1}\ \bar{1}$$
$$9\ 9 - 1\ 0\ \bar{1}$$

$$0\ 8\ 8\ 1\ 1$$

पहले व दूसरे चरण में हमें उर्ध्व व तिर्यक गुणा से 1 व 1 प्राप्त होता है। (देखें अध्याय 7) तीसरे चरण में हमें $\bar{2}$ प्राप्त होता है। क्योंकि हम उत्तर को साधारण अंकों में प्राप्त करना चाहते हैं, इसलिए हम तीसरे स्थान पर $\bar{2}$ नहीं लिखेंगे। अपितु इसका पूरक अंक 8 (सैंकड़े का) लिखेंगे। क्योंकि $\bar{2} = \bar{1}\ 8$ इसलिए $\bar{1}$ हासिल, हजारवें स्थान, के रूप में बांई ओर चला जाएगा। चौथे चरण में बांई ओर के दो स्तम्भों की तिर्यक गुणा करने से हमें $1 \times 0 + 1 \times \bar{1} = \bar{1}$ प्राप्त होता है, जिसमें हासिल का $\bar{1}$ जोड़ने से $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$ प्राप्त होता है। पूर्व की भाँति इसे

भी पुनः हम $\bar{1}$ 8 के रूप में प्रयोग करेंगे । 8 को हजारवें स्थान पर लिखते हैं व $\bar{1}$ हासिल अंक के रूप में बांई ओर ले जाते हैं । अन्तिम चरण में बांई ओर के प्रथम स्तम्भ के अंकों की गुणा करने से $1 \times 1 = 1$ प्राप्त होता है, इसमें हासिल का $\bar{1}$ जोड़ने से $1 + \bar{1} = 0$ प्राप्त होता है ।

इस प्रकार से हम विनकुलम् अंकों का प्रयोग करते हुए भी उत्तर को सीधे ही साधारण अंकों में बड़ी ही सरलता से प्राप्त कर सकते हैं । अध्याय 1 व 7 में किए गए प्रश्नों को पुनः इस प्रकार करने से वैदिक गणित की इस पद्धति का भी अभ्यास हो जाएगा ।

(×) उर्ध्व विधि से बांए से दांए ओर कार्य करते हुए भी हम उत्तर को सीधा ही एक पंक्ति में, व साधारण अंकों में प्राप्त कर सकते हैं ।

$$
\begin{array}{l}
8\ 9 - 1\ \bar{1}\ \bar{1} \\
9\ 9 - 1\ 0\ \bar{1} \\
\hline
\quad\quad 0\ /\ \ / \\
\quad\quad\quad\ \ 1 \\
\hline
\end{array}
$$

चरण 1 : बांए स्तम्भ को उर्ध्व गुणा करने से $1 \times 1 = 1$ प्राप्त होता है । यहां हम प्राप्त संख्या के केवल दहाई के अंक को उसी स्थान पर लिखेंगे व इकाई के अंक को दाई ओर के नीचे वाले स्तर में स्थानान्तरित कर देंगे। यह तो हम जानते ही हैं यदि किसी अंक को दाई ओर स्थानान्तरित किया जाए तो उसका मान दस गुणा हो जाता है । प्रथम चरण में हमने मात्र 0, 1 संख्या को प्राप्त किया । इसलिए 0 को बांई और प्रथम अंक के रूप में लिखेंगे । इकाई अंक के रूप में प्राप्त 1 को दांई ओर स्थानान्तरित करने पर हमें 10 प्राप्त होता है जिसे अगले स्तर पर प्राप्त संख्या में हम जोड़ देंगे ।

चरण 2 : दूसरे चरण में तिर्यक गुणा करने से हमें $1 \times 0 + 1 \times \bar{1} = \bar{1}$ इसमें प्रथम चरण से स्थानान्तरित करने के फलस्वरूप प्राप्त संख्या 10 में जोड़ने पर $10 + \bar{1} = 09$ प्राप्त होता है । पूर्व की भांति हम मात्र शून्य को इस स्थान पर रखेंगे व इकाई के 9 को दांयी ओर स्थानान्तरित कर देंगे। जिसका मान $9 \times 10 = 90$ हो जाएगा ।

चरण 3 : तीसरे चरण में तीनों स्तम्भों को सरल करने पर $\bar{2}$ प्राप्त होता है । इसमें स्थानान्तरित संख्या 90 को जोड़ने पर $90 + \bar{2} = 88$ प्राप्त होता है । प्राप्त संख्या के दहाई के अंक (8) को हम तीसरे स्थान पर लिखते हैं व इकाई के अंक (8) को पूर्व की भांति दांयी और स्थानान्तरित करते हैं। जिसका मान $8 \times 10 = 80$ हो जाएगा ।

चरण 4 : दायीं ओर के दो स्तम्भों की तिर्यक गुणा करने से 1 प्राप्त होता है। इसमें स्थानान्तरित संख्या 80 को जोड़ने से 80+1=81 प्राप्त होता है। पुनः दहाई के अंक (8) को इस स्थान पर लिखते हैं व इकाई के अंक (1) को दायीं ओर स्थानांतरित करने पर उसका मान 1×10=10 हो जाता है।

चरण 5 : दायीं ओर के अन्तिम स्तम्भ को सरल करने पर हमें 1 प्राप्त होता है। इसमें स्थानान्तरित संख्या 10 को जोड़ने पर 10+1=11 प्राप्त होता है। अन्तिम चरण में प्राप्त संख्या के दोनों अंक सीधे ही लिख देंगे। यदि किसी प्रश्न में हमें

$$\begin{array}{r} 1\,\bar{1}\,\bar{1} \\ 1\,0\,\bar{1} \\ \hline 0\,/\,0\,/\,8\,/\,8\,/\,11 \\ /\,1\,/\,9\,/\,8\,/\,1 \\ \hline \end{array}$$

अन्तिम चरण में एक ही अंक की संख्या प्राप्त हो तो प्राप्त अंक से पूर्व शून्य लगाकर ही अन्तिम स्थान में लिखेंगे, यह बात ध्यान देने योग्य है। साधारण पद्धति में हम मात्र दांये से बांये ओर ही गुणा करते हुए हासिल ले जाते हैं। बायीं से दायीं ओर एक का हासिल हम घटाते हुए अवश्य ले जाते हैं, जिसका मान 10 हो जाता है। अभ्यास द्वारा यह विधि भी बहुत सरलता व द्रुतगति से प्रयोग की जा सकती है। कृपया ध्यान दें कि वैदिक पद्धति से गणित के उच्चस्तरीय प्रश्नों को करने में इस विधि का प्रयोग करने से जटिल प्रश्न भी बड़ी सरलता से हल किए जा सकते हैं। (देखें Higher Applications of Vedic Maths)

14·5 भाग : वैदिक गणित में भाग करने के लिए भी कई विधियां उपलब्ध हैं। पूर्व अध्यायों में भाग करने के लिए उपयुक्त तीन सूत्रों, निखिलं सूत्र (क्रमांक 2), परावर्त्य सूत्र (क्रमांक 4) व उपसूत्र ध्वजंक और ऊर्ध्व सूत्र पर आधारित विधि (क्रमांक 3) से परिचय प्राप्त किया। पुनः इन विधियों में भी हम साधारण या विनकुलम् अंकों का प्रयोग कर सकते हैं। विशेष तरह के प्रश्नों में निखिलं व परावर्त्य सूत्रों पर आधारित विधियां कार्य करते हुए एक दूसरे के काफी समीप आ जाती हैं।

उदाहरणार्थ : यदि हमें किसी संख्या (300000) को (9888) से भाग देना है तो हम सीधे ही निखिलं विधि का प्रयोग करेंगे। जिसमें हमें संशोधित भाजक निखिलं सूत्र का प्रयोग करने से 0112 प्राप्त होता है और शेष कार्य हम मात्र संशोधित भाजक से पूर्ण करते हैं व हमें भागफल (30) व शेषफल (3360) मात्र दो ही चरणों में प्राप्त कर लेते हैं। (कृपया अध्याय 9 देखें।)

यदि हम भाजक को पहले विनकुलम् रूप में परिवर्तित कर लें तो हमें $10\bar{1}\bar{1}\bar{2}$ प्राप्त होता है। अब क्योंकि विनकुलम् रूप में भाजक का प्रथम अंक 1 है इसलिए हम परावर्त्य सूत्र का प्रयोग करते हुए भाग बड़ी सरलता से कर सकते हैं। (परावर्त्य द्वारा संशोधित भाजक 0112 प्राप्त होता है। अन्य विधि के लिए कृपया अध्याय–10 का अवलोकन करें।) लेकिन इस उदाहरण से यह निष्कर्ष निकालना कि निखिलं या परावर्त्य विधि एक ही है पूर्णतया असत्य है।

यदि हमारे भाजक में मिले-जुले अंक हों तो निखिलं व परावर्त्य विधि में कार्य करते हुए हमें एक से अधिक अंक मध्य के स्तर में प्राप्त हो सकते हैं। इस अवस्था में अतिरिक्त अंकों को बड़ी सरलता से उच्च स्तर में स्थानान्तरित (हासिल) करके भी प्रयोग किया जा सकता है। परन्तु बायीं ओर के अन्तिम अंक को उसी स्तर पर रखना अनिवार्य है। इन दोनों विधियों में कार्य करते हुए यह सतत प्रयास रहता है कि हर चरण में बायीं ओर के प्रथम स्तम्भ के अंकों को जोड़ने से हमें छोटे से छोटा अंक प्राप्त हो। यदि हम गुणा करते हुए निभिन्न स्तरों में प्राप्त अंकों को आवश्यकतानुसार साधारण व विनकुलम् रूप में लिखते जायें तो हम सरलता से छोटे अंक ही प्राप्त कर सकते हैं। इसका पूर्ण विस्तार आगे के पुष्पों में दिया जाएगा। कुछ प्रयोग आगे के प्रश्न में दिए गए हैं।

उदाहरण : 108 से 123192 को भाग करें।

इस प्रश्न को परावर्त्य व ध्वजंक विधि के प्रयोग से कर सकते हैं। हर विधि में कार्य करते हुए हमारे पास कई संभावनायें हैं।

परावर्त्य योज्येत् विधि :

हम भाजक 108 को इसी रूप में व इसको विनकुलम् रूप में परिवर्तित करके कार्य कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त दी हुई संख्या को भी साधारण रूप में या विनकुलम् रूप में प्रयोग कर सकते हैं। ऊपर लिखी हुई स्थानान्तरित करने की विधि का प्रयोग करने से कार्य में सरलता व गति आ जाती है।

(i)	108)‾	1 2 3 1 / 9 2
	$11\bar{2}$	$\bar{1}$ 2
(संशोधित भाजक)	$\bar{1}2$	$\bar{1}$ 2
		($\bar{4}$ 8)*
		$\bar{3}$ / $\bar{2}$
		/ 0 0
		1 1 4 0 / 7 2

*तीसरे चरण में संशोधित भाजक को 4 से गुणा करने पर हमें $\bar{4}\,8$ प्राप्त होता है। लेकिन हम स्पष्ट देख सकते हैं कि 8 को ऊपर के अंक 9 में जोड़ने से हमें शेषफल भाजक से अधिक प्राप्त होगा। इसके अतिरिक्त हम जानते ही हैं कि $\bar{4}8 = \bar{3}\bar{2}$, इसलिए हम इस स्तर पर $\bar{3}\bar{2}$ का प्रयोग करेंगे।

(ii) भाज्य को भी विनकुलम् रूप में रखने पर कार्य और अधिक सरल हो जाता है।

$$
\begin{array}{lll}
 & 108\,) & 1\;2\;3\;2\;/\;\bar{1}\;2 \\
 & 11\bar{2} & \quad\;\bar{1}\;2 \\
\text{(संशोधित भाजक)} & \bar{1}2 & \qquad\;\bar{1}\;2 \\
 & & \qquad\quad\;\bar{4}\;/\;8^{*} \\
 & & \qquad\qquad\;/\;0\;0 \\
\hline
 & & 1\;1\;4\;0\;/\;7\;2 \\
\hline
\end{array}
$$

*यहाँ शेषफल ऋणात्मक है इसलिए हम $\bar{4}8$ के द्वितीय अंक (8) को धनात्मक रूप में ही रखेंगे ताकि हमें सीधा धनात्मक शेषफल प्राप्त हो।

(iii) यदि हम भाजक को साधारण रूप में ही रखते हुए कार्य करें तो हमें द्वितीय चरण में ही स्थानान्तरण की आवश्यकता पड़ेगी।

$$
\begin{array}{lll}
 & 108\,) & 1\;2\;3\;\;2\;/\;\bar{1}\;2 \\
\text{(संशोधित भाजक)} & 0\bar{8} & \quad 0\;\bar{8} \\
\text{(स० भ०)} & & \quad\;(0\;\bar{1}\bar{6})^{*} \\
 & & \qquad\bar{1}\;\bar{6} \\
 & & \qquad\;(0\;48)^{*} \\
 & & \qquad\quad 4\;/\;8 \\
 & & \qquad\qquad/\;0\;0 \\
\hline
 & & 1\;2\;\bar{6}\;0\;/\;7\;2 \\
\hline
\end{array}
$$

*यहाँ द्वितीय व तृतीय चरण में हमें दायीं ओर दो अंक प्राप्त होते हैं। इन्हें प्रचलित विधि की भाँति हम बायीं ओर स्थानान्तरित करके लिख सकते हैं। किन्तु हमें यह ध्यान रहे कि बायीं ओर के प्रथम स्तम्भ में प्राप्त अंक को स्थानान्तरित करना सम्भव नहीं होता है। इसी कारण हम हर चरण में प्राप्त संख्या को रूपान्तरित करके हर बार प्राप्य भागफल के अंक को छोटे से छोटा करने का प्रयास करते हैं।

(iv) यदि हम भाजक और भाज्य दोनों के अंकों को साधारण रूप में ही रखें।

	108)	1 2 3 1 / 9 2
(स० भ०)	$0\bar{8}$	$0\ \bar{8}$
		$\bar{1}\ \bar{6}$
		(4 8)*
		$5 / \bar{2}$
		/ 0 0
		$1\ 2\ \bar{6}\ 0 / 7\ 2$

*पूर्व हल में तीसरे चरण में प्राप्त 48 को हमने ज्यों का त्यों रखा था ताकि हमें सीधा धनात्मक शेषफल प्राप्त हो। यदि यहाँ भी हम ऐसा ही करें तो हमें बहुत बड़ा शेषफल प्राप्त होगा जिसे पुनः संशोधित करना पड़ेगा। इसलिए 48 को हम रूपान्तरित करके $5\bar{2}$ लिखते हैं। जो हमें सीधा ही धनात्मक शेषफल देता है।

इस सरल उदाहरण से ही हमें यह स्पष्ट हो जाता है कि वैदिक पद्धति में हम सदैव सतर्क रहते हैं तथा प्रश्न के हर चरण में उसके सभी पहलूओं के प्रति जागरूक रहने से हल सुगमता से प्राप्त हो जाता है। यह अभ्यास मानवीय मस्तिष्क के सर्वांगीण विकास के लिए अत्यन्त उपयोगी है।

यहाँ पर यह प्रश्न उठना स्वाभाविक है कि साधारण मेधा शक्ति वाले विद्यार्थी के लिए आरम्भ में सीधा ही यह निश्चय करना कठिन होगा। यदि किसी भी चरण में सीधे ही उपयुक्त रूप में हम कार्य न भी करें तो अगले ही चरण में हमें यह स्पष्ट हो जाता है कि पूर्व चरण में कुछ संशोधन करने की आवश्यकता है और अभ्यास से हर कार्य सरल हो जाता है।

ध्वजांक व ऊर्ध्व विधि : यहाँ पर हमारे पास पुनः भाजक को ज्यों का त्यों (108) तथा विनकुलम् रूप में $(11\bar{2})$ प्रयोग कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त भाजक के रूप में हम दो अंक या एक ही अंक का प्रयोग कर सकते हैं। प्रथम हम भाज्य के सभी अंकों को साधारण अंकों में ही रखेंगे। (देखें अध्याय–11)

(v)	8)	1 2 3 1 9 : 2 :
	10	2 5 3 7
		1 1 4 0 : 72 :

(vi) $\bar{2}$) 1 2 3 1 9 : 2 :

11   1 4 $\bar{1}$ 7

*

---

1 1 4 0 : 72 :

*चौथे चरण में संशोधित भाजक

$= 41 - 1 * \bar{2} = 43$

यदि हम 11 से भाग देते हुए भागफल 3 ही लें तो शेषफल बहुत बड़ा आ जाता है और ध्वजांक में ऋणात्मक अंक होने के कारण वह और बढ़ जाता है। इसलिए यहाँ भागफल हम 4 लेंगे व शेष (-1) रहेगा। $43-44=-1=\bar{1}$

(vii) 08) 1 2 3 1 : 9 2 :

1   0 0 1 $\bar{5}$

---

1 2 $\bar{5}$ $1\bar{5}$*

---

1 2 $\bar{6}$ 0 : 7 2 :

---

*चरण 3 में हमें संशोधित भाज्य $\bar{5}$ प्राप्त होता है। यदि हम अब $\bar{5}$ ही अगला भागफल का अंक लें तो अगले चरण में हमें $1\bar{5}$ प्राप्त हो जाता है। इसलिए हम भागफल का तीसरा अंक $\bar{6}$ लेते हैं जिसके फलस्वरूप हमें शेषफल 1 मिलता है। अगले चरण में प्राप्त $\bar{5}$ को ज्यों का त्यों शेषफल के सामने रख देंगे और भागफल का अगला अंक शून्य ही लेंगे। प्रथम शेषफल $\bar{5}92$ प्राप्त होगा। जिसे पुनः 08 व $\bar{6}0$ के ऊर्ध्व गुणनफल से संशोधित करेंगे। (देखें अध्याय–1!, उदाहरण 7)

$\bar{5}92-\bar{4}80=\bar{5}92+480=72$

(viii) $1\bar{2}$) 1 2 3 1 : 9 2 :

1   0 0 0 $\bar{1}$

---

1 1 4 0 : 7 2 :

अन्तिम शेषफल $= \bar{1}92-8\bar{0} = -8+80$

$= 72$

अन्य विधियां :

इसके अतिरिक्त इसी प्रश्न को यदि हम ध्वजंक विधि से करते हुए भाज्य को भी विनकुलम् रूप में लिख लें तो चार और प्रकार के हल प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार वैदिक गणित पद्धति में भाग करने की क्रिया के लिए भी (जिसके लिए प्रचलित गणित में मात्र एक ही ऊबा देने वाली क्लिष्ट विधि ही है) एक सुन्दर उपवन में खिले हुए भांति-भांति के फूलों के तुल्य कई विधियां उपलब्ध हैं और हर प्रकार से प्रश्न को हल करने से मस्तिष्क के हर अणु का विकास सम्भव है। अन्तिम दो विधियों से यह भी स्पष्ट हो गया है कि यदि प्रथम अंक 1 हो तो मात्र उसी को भाजक बनाकर कार्य करने से काफी अनावश्यक कठिनाई का सामना करना पड़ता है।

उदाहरण : आईये अब अध्याय 9 के प्रश्न 11 को हल करें व अभी सीखी विधियों का प्रयोग करेंगे ताकि कार्य में सुगमता आ जाये ?

भाग दें व उत्तर दशमलव रूप में प्राप्त करें।

112)‾ 563478

112)‾ 1 $\bar{4}$ $\bar{4}$ 3 5 / $\bar{2}$ $\bar{2}$

$\bar{1}\bar{2}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$

(5 10)*

6 0

0 0 /

($\bar{3}$ $\bar{6}$)**

$\bar{4}$ 4

$\bar{1}$ $\bar{2}$

---

1 $\bar{5}$ 0 3 1 / 1 $\bar{4}$

· $\bar{1}$ $\bar{2}$

6 0 *

($\bar{4}$ $\bar{8}$)

$\bar{5}$ 2 **

6 0 *

$\bar{9}$ $\bar{6}$

---

1 $\bar{5}$ 0 3 1·1 $\bar{5}$ 4 $\bar{5}$ 8 $\bar{9}$

=5031·053571

*स्थानान्तरित किया है।

**विनकुलम् रूप परिवर्तित करके प्रयोग किया है।

अभ्यास :

प्रश्न 1. निम्नलिखित को गुणा करें और विभिन्न विधियों की तुलना करें।

(i) 86×99

(ii) 817×989

(iii) 988×992

(iv) 372×418

(v) 2893×179

प्रश्न 2. निम्नलिखित को विभिन्न विधियों से भाग करें तथा बतायें कि कौनसी विधि उपयुक्त है—

(i) $14567 \div 118$

(ii) $235676 \div 1026$

(iii) $1048792 \div 1236$

अध्याय-15

'पुष्पमाला' एक झलक

15·1 परिचय : वैदिक गणित एक अत्यन्त प्राचीन एवं वृहद्ध विषय है। पुष्प–1 व 2 में हमने अंकगणितीय व सरल बीजगणितीय प्रक्रियाओं की वैदिक विधियाँ संकलित की हैं। इन अथर्ववेद से संकलित वैदिक सूत्रों का उच्चस्तरीय गणित की कई शाखाओं में पुनः उपयोग किया जा चुका है। हमारे समय में शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज द्वारा लिखी गई प्रथम वैदिक गणित की पुस्तक में शंकराचार्य जी ने इन वैदिक गणित सूत्रों के विलक्षण अनु प्रयोग अंकगणितीय संगणनाओं, संख्या पद्धति, मिश्रित गुणन, बीजगणितीय क्रियाओं, गुणनखण्ड, सरल द्विघातीय समीकरण, आंशिक भिन्न, कलावकलन, वर्ग एवं घन क्रियायें, वर्गमूल, घनमूल, निर्देशांक ज्यामिति एवं अद्वितीय वैदिक गणित संकेताक्षर के प्रश्नों को द्रुत गति से करने की विधियों को दर्शाया है। रूड़की विश्वविद्यालय अमेरिका व इंगलैंड में हो रही शोध में वैदिक सूत्रों का प्रयोग त्रिकोणमिति, त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति-समतलीय एवं गोलीय त्रिभुजों के हल, रैखिक एवं बहु रैखिक अवकल समीकरण, सारणिक एवं लघु गणकीय चरघातांकी समीकरणों के हल में किया गया है।

हाल ही में लन्दन से वैदिक गणित पर प्रकाशित पाँच पुस्तकों में से 'डिस्कवर वैदिक मैथमैटिक्स' एक पुस्तक में प्रोफेसर कैनिथ विलियम्स ने जी. सी. ई. ए. लेवल (उच्चस्तर) और ओ. लेवल (साधारण स्तर) की गणित की परीक्षाओं के सभी प्रश्न इन वैदिक सूत्रों के द्वारा हल करके दिखायें हैं।

इस प्रकार यह स्पष्ट कर दिया गया है कि हमारे (10+2) स्तर तक के सम्पूर्ण गणित को हमारी प्राचीन सरल, सुलभ एवं द्रुत गति वाली वैदिक गणित के सूत्रों द्वारा भी हल किया जा सकता है। वैदिक गणित आज के प्रतियोगिताओं के युग में एक वरदान है। फिर भी यह निष्कर्ष निकालना कि वैदिक गणित मात्र उच्चस्तर माध्यमिक गणित में ही प्रयोग किया जा सकता है हमारी भूल होगी।

हाल ही में प्रकाशित शोध पुस्तक वरटीकली एण्ड क्रासवाइस—ऊर्ध्व सूत्र के उपयोग में तीसरे वैदिक सूत्र का उपयोग करके गणित के विभिन्न विषयों के कठिन प्रश्नों को हल करके दिखाया गया है। (कृपया वैदिक गणित समाचार देखें)। इनमें रैखिक एवं बहु रैखिक अवकलन समीकरण, सारणिक एवं लघु गणकीय चरघातांकी समीकरण, त्रिकोणमिति (Trigonometrical function and their inverse,

exponentials, Higher order equations, Nonlinear Differential, Partial Differential and integro Differential equations, Simultaneous Equations etc.) आदि-आदि विषय भी शामिल हैं।

मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा निर्मित राष्ट्रीय वेद विद्या प्रतिष्ठान ने वैदिक गणित की पहली कार्यशाला मार्च 1988 में जयपुर में आयोजित की। फलस्वरूप वैदिक गणित के आगे के कार्यक्रमों व शोध की रूपरेखा बनाने के लिये एक राष्ट्रीय समिति का गठन किया गया है। इसके तत्वाधान में अक्टूबर 1988 में अहमदाबाद में दूसरी कार्यशाला आयोजित की गई।

इस कार्यशाला में रुड़की विश्वविद्यालय के सदस्यों द्वारा इन वैदिक सूत्रों के त्रिकोणमिति, ज्यामिति, (कैलकुलस) अवकलन समाकलन, बीजगणित आदि में विविध उपयोग दर्शाये गए। लेखक द्वारा हाल ही में इन वैदिक सूत्रों के उच्चस्तरीय उपयोगों पर एक पुस्तक लिखी गई है। इस शोध से यह स्पष्ट विदित हुआ है कि त्रिकोणमिति, त्रिविमीय निदेशांक ज्यामिति—समतलीय एवं गोलीय, त्रिभुजों के हल वैदिक त्रिभुजांक पद्धति द्वारा अत्यधिक सरलता व गति के साथ किए जा सकते हैं। नवीनतम शोध द्वारा प्राप्त विस्तार इस पुष्पमाला के नवीन पुष्पों में क्रम से दिया जाएगा। इस अध्याय में मात्र कुछ झलकियां ही प्रस्तुत की जा रही है।

15·2 उर्ध्व सूत्र के प्रयोग :

15·2·1 समकालीन समीकरणों के हल :

-8	$4x-2y+3z=8$	-5
14	$2x-3y+z=1$	-17
13	$3x+2y-z=3$	4

$D=33,\ xD=33,\ -yD=-33,\ zD=66$

अत: $x=y=1,\ z=2$ (तृतीय सूत्र का प्रयोग किया है)

15·2·2 वक्र आलेखन :

एक ऐसे द्विघातीय वक्र का समीकरण ज्ञात करिये जो (8, 7), (6, 5) एवं (9, 4) से गुजरता है। मूल विन्दु को (6, 5) पर प्रति स्थापित किया तीन बिन्दु के निर्देशांक (2, 2), (0, 0), (3, —1)

यदि समीकरण $y=Ax^2+Bx$ है।

उर्ध्व सूत्र से $6y=-8x^2+22x$

अथवा $6y=-8x^2+118x-390$

15·2·3 उर्ध्व सूत्र से मान ज्ञात करो—

$B=e^{23\cdot51}$

$B=e^{23\cdot51}=1\cdot62279\times10^{10}$

यहाँ पर केवल कुछ सरल उदाहरणों को ही प्रस्तुत किया गया है।

15·2·4 त्रिभुजांक : वैदिक गणित पद्धति में यदि क, ख, ग तीन संख्यायें हों जिसमें $क^2+ख^2=ग^2$ होता है तब हम इन तीन संख्याओं को त्रिभुजांक कहते हैं। उर्ध्व सूत्र के द्वारा हम त्रिभुजांकों को जोड़ व घटा सकते हैं।

(i) 105° के त्रिभुजांक ज्ञात करो—

ज्ञात है त्रिभुजांक (60°)	1	$\sqrt{3}$	2
(45°)	1	1	$\sqrt{2}$
उर्ध्व सूत्र द्वारा (60+45 =105°)	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$

(ii) लोनी द्वारा लिखित त्रिकोणमिति की पुस्तक में से उद्धरित एक समीकरण को त्रिभुजांक द्वारा हल करने से हमें परिणाम सीधा ही मिल जाता है।

सिद्ध करो—

$$\sin 105° + \cos 105° = \cos 45°$$

त्रिभुजांक द्वारा

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$$

प्रचलित विधि द्वारा

$$\begin{aligned}\sin 105° + \cos 105° &= \sin(180°-105°) - \cos(180°-105°)\\ &= \sin 75° - \cos 75°\\ &= \sin 75° - \sin(90°-75°)\\ &= \sin 75° - \sin 15°\\ &= 2\cos 45° \sin 30°\\ &= 2\cos 45° (1/2)\\ &= \cos 45°\end{aligned}$$

प्रचलित विधि द्वारा करने से हमने पाँच त्रिकोणमितीय फार्मूलों का प्रयोग किया है। जबकि वैदिक विधि में मात्र एक ही सूत्र द्वारा सीधा ही कार्य सम्पन्न हो जाता है। इसी प्रकार अन्य कार्य सरलता से हो जाता है। (विस्तार के लिये देखें VM—Higher Applications).

उत्तरमाला

अध्याय 1 :

प्र॰ 1. (i) 17644 (ii) 391409 (iii) 3209087

प्र॰ 2. (i) —5642003 (ii) —185709

प्र॰ 3. (i) $\bar{1}4$ (ii) 27 (iii) $\bar{6}\bar{0}$ (iv) 34

प्र॰ 4. (i) असत्य 301 (ii) असत्य 020 (iii) सत्य (iv) सत्य

प्र॰ 5. (i) 42516 (ii) 30001 (iii) 2006

प्र॰ 6. (i) 190 (ii) 0090 (iii) 20000

अध्याय 2 :

प्र॰ 1. (i) 990 (ii) 12598 (iii) $\bar{2}\bar{5}\bar{4}\bar{6}\bar{1}$
(iv) 63598 (v) 43188 (vi) 4466
(vii) $\bar{3}\bar{9}0$ (viii) 3018 (ix) 333
(x) 267 (xi) —3083

अध्याय 3 :

प्र॰ 1. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य
(v) असत्य

अध्याय 4 :

प्र॰ 1. (i) 3 घंटे 31 मिनट 11 सेकण्ड (ii) 15 गज 0 फुट 8 इन्च
(iii) 54 टन 26 किग्रा॰ 27 ग्रा॰ (iv) 14 किमी. 146 मी. 80 सेमी.
(v) 3 साल 5 माह 9 दिन 14 घंटे 7 मिनट

प्र॰ 2. (i) 1 घंटा 31 मिनट 47 सेकण्ड (ii) 1 गज 0 फुट 10 इन्च
(iii) 11 टन 95 किग्रा॰ 991 ग्राम (iv) 6 किमी. 344 मीटर 98 सेमी
(v) 1 साल 10 महीने 13 दिन 14 घंटे 15 मिनट

प्र॰ 3. (i) 3 गज 0 फुट 8 इन्च, मात्रक माप 2 गज के ऊपर लगा बिन्दु गलत है।
(ii) 2 साल 7 महीने 19 दिन, 4 माह के अंक 4 पर भी शुद्धिकरण बिन्दु लगाना है।

अध्याय 5 :

प्र॰ 1. (i) 10 वर्ग फुट 100 वर्ग इन्च (ii) 8 वर्ग गज 8 वर्ग फुट
(iii) 9 वर्ग गज 6 वर्ग फुट 45 वर्ग इन्च

प्र० 2. (i) 46 घन फुट 1712 घन इन्च (ii) 48 घन फुट 576 घन इन्च
प्र० 3. (i) 35 वर्ग फुट 43·5 वर्ग इन्च (ii) 11 वर्ग फुट 141 वर्ग इन्च

अध्याय 6 :

प्र० 1. (i) 5925 (ii) 4557 (iii) 3456
(iv) 3108 (v) 24700900 (vi) 65021
(vii) 29876 (viii) 99858 (ix) 23985202

प्र० 2. (i) 1023 (ii) 523960479 (iii) 2508
(iv) 296808 (v) 975154 (vi) 2537
(vii) 1000994 (viii) 61226 (ix) 2352
(x) 272 (xi) 1763 (xii) 420736
(xiii) 720979

अध्याय 7 :

प्र० 1. (i) 1225 (ii) 3025 (iii) 5625
(iv) 11025 (v) 15625 (vi) 27225

प्र० 2. (i) 2021 (ii) 4216 (iii) 7209
(iv) 5624 (v) 9009 (vi) 11021
(vii) 13216 (viii) 13209 (ix) 11024
(x) 20819 (xi) 20564 (xii) 420736
(xiii) 722757 (xiv) 720651 (xv) 720291

प्र० 3. (i) 1683 (ii) 5544 (iii) 56232
(iv) 413586 (v) 50589 (vi) 70983
(vii) 8758233 (viii) 493620633 (ix) 584311563
(x) 9989001 (xi) 62937 (xii) 76699233

प्र० 4. (i) 336 (ii) 912285 (iii) 865830
(iv) 991022985 (v) 1023135225 (vi) 989969220
(vii) 970140

प्र० 5. (i) 11232 (ii) 99660225
(iii) 998599604803499175

अध्याय 8 :

प्र० 1. (अ) (i) 23807 (ii) 39621 (iii) 160643
(iv) 11545452 (v) 124451712 (vi) 142884
(vii) 2609581680

(ब) (i) 70505756 (ii) 690924 (iii) 5166372
(iv) 523593696 (v) 9331313038 (vi) 974169
(vii) 1042441

(स) (i) 307717 (ii) 37224 (iii) 17738
(iv) 23577 (v) 110517 (vi) 86457
(vii) 372724 (viii) 9057906 (ix) 7438638008
(x) 737204041 (xi) 8226554532

अध्याय 9 :

प्र० 1. (i) भागफल (भा०)=1 शेषफल (शे०)=4495
(ii) भा०=112 शे०=47 (iii) भा०=23 शे०=3103
(iv) भा०=112 शे०=3452

प्र० 2. (i) भा०=2 शे०=189 (ii) भा०=14 शे०=34510
(iii) भा०=340 शे०=1498

प्र० 3. (i) 1471·4343 (ii) 1981 97407
(iii) 4391·73913

अध्याय 10 :

प्र० 1. (i) भा०=112 शे०=3 (ii) भा०=20 शे०=28
(iii) भा०=11 शे०=916 (iv) भा०=12 शे०=207

प्र० 2. (i) 2·42 (ii) 6·840 (iii) 11·3125

प्र० 3. (i) भा०=6555 शे०=5366 (ii) भा०=57 शे०=3279
(iii) भा०=1272 शे०=4339

अध्याय 11 :

प्र० 1. (i) भा०=590 शे०=16 (ii) भा०=938 शे०=28
(iii) भा०=11872 शे०=131 (iv) भा०=114825 शे०=75

प्र० 2. (i) 130·3846 (ii) ·9606 (iii) ·33016

अध्याय 12 :

प्र० 1. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य
(v) असत्य

अध्याय 13 :

प्र० 1. (i) भागफल $= 4क^2 + 9क + 29$, शेषफल $= 128$
(ii) भागफल $=क + 2$, शेषफल $=9$

(iii) भागफल $=$ क$^3 - 3$क$^2 - \frac{5}{2}$क $+ \frac{13}{4}$, शेषफल $= \frac{-15}{4}$क $+ \frac{59}{2}$

(iv) भागफल $=$ क$^2 - 2$क $- 3$, शेषफल $= 24$क

(v) भागफल $= 4$क$^2 + 2$क $+ 1$, शेषफल $= 0$

(vi) भागफल $=$ क$^2 + 2$क $+ 3$, शेषफल $= -2$क $+ 21$

(vii) भागफल $= 7$क^3, शेषफल $=$ क$^2 + 15$क $+ 3$

प्र० 2. (i) भागफल $=$ क$^3 +$ क$^2 + 11$क $+ 49$, शेषफल $= 203$

(ii) भागफल $= 6$क$^2 + 25$क $+ 143$, शेषफल $= 548$क $+ 1332$

(iii) भागफल $= 2$क$^2 - 3$क $+ 2$, शेषफल $= 0$

अध्याय 14 :

प्र० 1. (i) 8514 (ii) 808013 (iii) 980096

(iv) 155496 (v) 517847

प्र० 2. (i) भागफल $= 123$, शेषफल $= 53$

(ii) भागफल $= 229$, शेषफल $= 722$

(iii) भागफल $= 848$, शेषफल $= 664$

आभार प्रदर्शन

वैदिक गणित और उसकी कम्प्यूटर उपयोगिता पर प्रथम कार्यशाला का आयोजन रुड़की विश्वविद्यालय में अगस्त 87 में हुआ था (देखें वैदिक गणित समाचार) इस कार्यशाला के सभी व्याख्यानों की वीडियो रिकार्डिंग की गई थी।

आध्यात्मिक अध्ययन संस्था उन सभी के प्रति कृतज्ञ है जिन्होंने वीडियो रिकार्डिंग को प्रायोजित करने में अपना सहयोग दिया।

प्रायोजक

1. डा० एस० आर० जिन्दल, रुड़की
2. श्री रामदयाल अग्रवाल, रुड़की
3. श्री अमरनाथ, रुड़की
4. कलावती विद्या मन्दिर, रुड़की
5. जिन्दल इलैक्ट्रानिक्स लि०, रुड़की
6. आर० जे० इन्डस्ट्रियल कारपोरेशन, रुड़की
7. श्री ए० पी० गर्ग, यूनिवर्सल आपटिक्स, रुड़की
8. श्री विजय कुमार, न्यू इन्जीनियरिंग कारपोरेशन, रुड़की
9. डा० आनन्द प्रकाश, साइनटिफिक इक्विपमेन्टस, रुड़की
10. श्री आई० धवन, नेशनल इन्सूलेटरस, रुड़की
11. श्री अनिल जैन, जय भारत ड्राइंग एण्ड सर्वे इन्सट्रूमेन्टस, रुड़की
12. श्री राकेश कुमार, मैसर्स रुड़की गैस एजेन्सी, रुड़की
13. श्री मुकेश कुमार, मैसर्स सरस्वती इन्जीनियरिंग एजेन्सी, रुड़की



भविष्य की ओर

वैदिक गणित के विभिन्न ज्ञान, विज्ञान व तकनीकी क्षेत्र में असीमित उपयोग सम्भव है। उत्तरी लन्दन पोलिटेक्निक के प्रोफेसर एन्ड्रयू निकोलस वैदिक गणित के अत्यन्त उज्जवल भविष्य की आशा करते हैं। वैदिक गणित समाचार में दिए गए विषयों के अतिरिक्त शंकराचार्य भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज ने निम्नलिखित विषयों में भी वैदिक गणित की विधियों का उल्लेख किया है। अभ्यास, अनुपात, ब्याज, गति विज्ञान, स्थिति विज्ञान, जल स्थिति विज्ञान, वायु विज्ञान, यांत्रिकी, ठोस ज्यामिति, समतलीय एवं गोलीय त्रिकोणमिति, खगोलशास्त्र इत्यादि। डा० गुज्जर मल वर्मा (देहली) ने हमें सूचित किया है कि शंकराचार्य जी ने नागपुर विश्वविद्यालय में बारह व्याख्यानों की एक शृंखला वैदिक गणित के तकनीकी वायु-विज्ञान में उपयोगों पर दी थी।

यह स्पष्ट है कि वैदिक गणित के जो उपयोग इस समय हमें उपलब्ध है वो एक असीम तैरते हुए हिमखण्ड के जल से ऊपर दिखते अल्प हिस्से के तुल्य है।

इस छुपे हुए ज्ञान के भण्डार को पुनः विकसित करने के लिए सुचारू रूप से शोध की आवश्यकता है।

वैदिक गणित सीखने वालों की अनुक्रिया से सारांश रूप में निम्न पहलू स्पष्ट होते हैं।

(1) वैदिक पद्धति से बच्चों के लिए गणित भार नहीं बल्कि मनोरंजक एवं रूचिकर विषय बन जाता है जिसे नन्हें फूल मुस्कराते हुए सीखते हैं।

ठीक यही अनुक्रिया अमेरिका के उन ढेरों बच्चों की भी हुई है जो हाल ही में प्रारम्भ वैदिक गणित सीखने के दिव्य आनन्द का आस्वादन ले रहे हैं।

(2) वैदिक गणित की कक्षाओं में सम्मिलित होने वाले शिक्षक एवं शिष्य यह प्रश्न सैकड़ों बार दोहरा चुके हैं कि वैदिक गणित क्यों विश्व के प्रत्येक स्कूल व कालेज में नहीं पढ़ाया जा रहा है।

(3) वैदिक गणित सीखने से हमारे हृदय में राष्ट्रीय गौरव जाग्रत होता है तथा अपनी महान संस्कृति के प्रति श्रद्धा की ज्योति पुनः जाग्रत होती है।

इस वैदिक गणित को पुनः विकसित करने एवं अपने देशवासियों में इसका प्रचार करने के लिए भारत माता के चरणों से प्रेम करने वाले सपूतों के अथक प्रयासों की आवश्यकता है।



प्राचीन वैदिक गणित

पुष्पमाला : हमारी इस प्राचीन सांस्कृतिक संपदा के विभिन्न प्रयोगों को सर्वसाधारण तक पहुँचाने हेतु अ० वि० शृ० प्राचीन वैदिक गणित की पुष्पमाला गूँथकर भारत माता के श्री चरणों में समर्पित कर रहा है। इस पुष्पमाला के दो पुष्प हिन्दी व अंग्रेजी दोनों भाषाओं में प्रकाशित हो चुके हैं एवं अंग्रेजी का तृतीय पुष्प भी साथ ही प्रकाशित हो रहा है।

अ० वि० शृ० विनम्र प्रार्थना के साथ पुष्प-3 को हिन्दी में इसी वर्ष प्रकाशित करने का प्रयास कर रहा है।

आमन्त्रण

आप इस ज्ञान यज्ञ में सम्मिलित होने व अपने अमूल्य समय की आहुति (समय दान के रूप में) देने के हेतु सादर आमन्त्रित हैं। अपनी रूचि व सुविधा के अनुसार आप आगे दिए विभिन्न पहलुओं में सम्भव कार्य भारत माता के प्रति श्रद्धा भाव से कार्यान्वित कर सकते हैं।

—वैदिक गणित का प्रचार व प्रसार

- अपने मित्रों व परिचितों को वैदिक गणित के पत्रक (फोल्डर) भेजना। (मात्र रु० 1/- की डाक टिकट व पता भेजने पर आऽस वैदिक गणित पत्रक की एक प्रति किसी भी स्थान पर भेज सकती है।)
- अपने मित्रों, परिचितों व अपरिचित व्यक्तियों के समुदाय में वैदिक गणित विषय की चर्चा।
- वैदिक गणित के जादुई गति के उदाहरणों की झलकियाँ इच्छुक विद्यार्थियों, अध्यापकों व अन्य व्यक्तियों को करके दिखाना।
- सभी को यह बताना कि वैदिक गणित एक सम्पूर्ण वैज्ञानिक पद्धति है। जिसके सीखने से मानवीय मस्तिष्क का सम्पूर्ण व सर्वांगीण विकास होने लगता है व अन्तर्ज्ञान की क्षमता स्वतः ही जाग्रत होने लगती है।
- अपने निकट के संस्थानों में वैदिक गणित की झलकियों पर वक्तव्य देना व आयोजित करना। जिसके फलस्वरूप सभी सीखने वालों के चेहरों पर पुनः पुनः आने वाली मुस्कराहट का दिव्य आनन्द आप भी ले सकेंगे।

- अपने स्थान पर वैदिक गणित के लघु पाठ्यक्रमों का आयोजन करना।
- स्वयं आsस के सदस्य बनें व मित्रो को बनाएँ।

—वैदिक गणित के साहित्य का प्रचार

- अपने मित्र एवं परिचितों को वैदिक गणित की पुस्तकें उपहार देना।
- वैदिक गणित साहित्य को अपने स्थान के पुस्तकालयों को अपनी ओर से उपहार देना।
- वैदिक गणित की पुस्तकों को आप द्वारा आयोजित पारितोषक समारोहों में पारितोषक रूप में देना।

—वैदिक गणित का विकास

- प्राचीन द्रुत गति वाले गणितीय प्रकरण एवं पाठ्य सामग्री का संकलन करना व आsस को भेजना अथवा सूचित करना।
- वैदिक सूत्रों का विज्ञान के विभिन्न पहलुओं के प्रश्नों में उपयोग करना व उसे संकलन व प्रकाशन हेतु आsस को भेजना।
- वैदिक गणित सूत्रों पर आध्यात्मिक दृष्टि से विभिन्न पहलुओं का मनन करना व उनके विकास एवं बहुमुखी उपयोगों को विकसित करना।

आsस आपको इस यज्ञ में सहयोग देने के लिए तत्पर है। वेदान्त के दृष्टिकोण से इस प्रकार का निःस्वार्थ कर्म हमें अपने अन्तःकरण को निर्मल करने में पूर्ण रूप से सहायक होता है और निर्मल व शान्त अन्तःकरण में वेद वाक्य तत्वमसी की अनुभूति स्वतः ही होने लगती है।






COMPILED

वैदिक गणित—मुस्कराता गणित

उल्लेखनीय तथ्य : वैदिक गणित की प्रणाली आधुनिक कठिन गणित शिक्षा से विशिष्ट एक नई पद्धति प्रदान करती है। वैदिक गणित सीखने में सरल है तथा विद्यार्थी की संरचक शक्ति को प्रखरता प्रदान करता है। किसी भी प्रश्न के लिए एक तो साधारण पद्धति रहती है जो सभी प्रश्नों को हल करने में सक्षम है इसके अतिरिक्त विशिष्ट प्रश्नों के लिए विशेष द्रुत गति की पद्धति भी है। विभिन्न संभावनायें और चुनाव का तत्व मस्तिष्क को जीवन्त और जागरूक बनाए रखता है, जिसके फलस्वरूप मस्तिष्क और विचारधारा की स्पष्टता और अन्तर्ज्ञान की क्षमता उत्पन्न होती है।

मानवीय मस्तिष्क का सर्वांगीण विकास

आधुनिक मस्तिष्क विशेषज्ञों के मतानुसार, साधारणतया हमारे स्कूलों व कालेजों में पढ़ाए जाने वाले गणित आदि विषयों से मानव मस्तिष्क का बायां भाग ही विकसित व क्रियाशील होता है। मस्तिष्क का बायां भाग तथ्यों को एकत्र करके क्रमबद्ध विश्लेषण कर तर्क संगत निष्कर्ष व हल देता है। मस्तिष्क का दायां भाग ढांचे की पहचान कराता है व इसमें अन्तर्ज्ञान प्राप्त करने की क्षमता है।

वैदिक गणितीय पद्धति में सर्वप्रथम किसी भी प्रश्न के आदर्श ढांचे की पहचान करते हैं। व प्रत्येक चरण में अनेक सभावनाओं में से उपयुक्त विधि का चयन करते हैं। शेष कार्य द्रुत गति वाली मानसिक क्रियाओं द्वारा सम्पन्न होता है। इस प्रकार मस्तिष्क का दायां भाग भी सुचारू रूप से विकसित होता है। वैदिक गणितीय पद्धति की प्राकृतिक व स्वाभाविक मानसिक प्रणालियों के नियमित (प्रतिदिन मात्र 20 से 30 मिनट) अभ्यास से मानवीय मस्तिष्क का सर्वांगीण विकास स्वतः ही होने लगता है व कई बार अन्तःकरण में स्थित असीम आनन्द का बोध होता है।

वैदिक गणित मानवीय मस्तिष्क सार्वभौमिक कम्प्यूटर (Cosmic Computer) के लिए सार्वभौमिक साफ्टवेयर (Cosmic Software) प्रदान करता है।

मूल्य : साधारण रु० 18/-
सजिल्द रु० 25/-